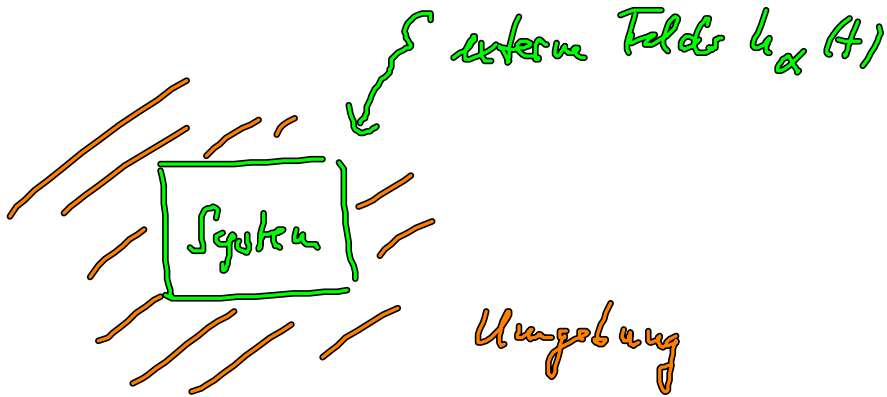


2.1.4. Wechselwirkung von System und Umgebung



$$H_{\text{ges}} = H + H_B + H_{SB}$$

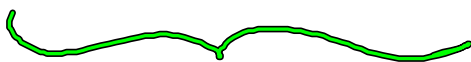
\uparrow \uparrow \uparrow
 System Umgebung WW System / Umgebung

$$H = H_S + H_S^{\text{ex}}(t)$$

\uparrow \uparrow
 System H externes Feld
 ohne h_x

$$H_B \quad \text{Umgebung} = \text{"Bad"}$$

Umgebung wird oft Bad genannt:
 - viele Freiheitsgrade / Zustände



inkohärent



Umgebung wird durch die viel Freiheitsgrade nicht v. System beeinflusst

→ Analogie zu Dachstuhl
 (so wird Irreversibilität erklärt)

gesamt wellenfunktion $i\hbar \partial_t \chi = H_{ges} \chi$

$$|\chi\rangle = \sum_{a,b} c_{a,b}(t) |a\rangle |b\rangle$$

$$H_S |a\rangle = \epsilon_a |a\rangle$$

$$H_B |b\rangle = \epsilon_b |b\rangle \rightarrow \text{da gerade für nicht!}$$

wollen nicht $|\chi\rangle$ haben

eigenheit sind Erwartungswerte $\langle O_S \rangle$ des System S
 gesucht:
 Systemoperator

$$\langle O_S \rangle = \langle \chi | O_S | \chi \rangle =$$

$$\sum_{a,a',b,b'} c_{a'b'}^* c_{ab} \langle a' | \langle b' | O_S | b \rangle | a \rangle =$$

← wirkt nicht auf O_S

$$\text{mit } \langle b|b' \rangle = \delta_{bb'}$$

$$\langle O_S \rangle = \sum_{u, u'} \underbrace{\sum_b c_{u'b}^* c_{ub}}_{\text{analytisch berechnen QM}} \langle u' | O_S | u \rangle$$

Bad Info ist in b -Summe $\equiv \rho_{u'u}$

$\rho_{u'u}$ heißt Dichtematrix, enthält die Information zur Umgebung:

$\rho_{u'u}$ ist hermitisch \rightarrow kann diagonalisiert werden

nach Interpretation der QM um ρ folgendes gelten:

a) $|c_{ub}|^2 \in [0, 1]$, weil Wahrscheinlichkeit

b) $\sum_{u, b} |c_{ub}|^2 = \sum_u \rho_{uu} = 1$

\rightarrow Die Spur der Dichtematrix ist 1.

um physikalisch zu interpretieren ordnen wir $\rho_{u'u}$

den Dichtoperator ρ zu: (statistischer Operator: andere Bezeichnung)

$$\langle X | O_S | X \rangle = \sum_{\underline{u, u'}} \langle u | \rho | u' \rangle \underbrace{\langle u' | O_S | u \rangle}_{\text{Vollständigkeit: } 1 = \sum_u |u\rangle\langle u|}$$

$$= \sum_u \langle u | \rho O_S | u \rangle$$

Erwartungswert ein Systemoperators:

$$\langle O_s \rangle = \text{sp}(\rho(t) O_s)$$

$$\text{sp}(\dots) \equiv \sum_u \langle u | \dots | u \rangle$$

↑
vollständiges System

Diese fglg. ist die Verallgemeinerung f. Erwartungswerte in der statistischen Physik.

Was wissen wir über ρ ?

a) in Eigendarstellg. kann man ρ schreiben:

$$\rho = \sum_i v_i | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i |$$

Schrödingersbild, falls $| \varphi_i(t) \rangle$

ρ wirkt un in Systemraum

$$\rightarrow i \hbar \partial_t | \varphi_i \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{System-H}}}{H} | \varphi_i \rangle$$

b) Interpretation von ρ :

$$\langle O_S \rangle = \text{sp}(\rho O_S) = \sum_u \langle u | \rho O_S | u \rangle$$

$$= \sum_u \underbrace{\langle u | \sum_i w_i | \gamma_i \rangle \langle \gamma_i | O_S | u \rangle}_{\text{Zahlen}}$$

mit $1 = \sum_u |u\rangle \langle u|$ folgt $= \sum_i w_i \langle \gamma_i | O_S | \gamma_i \rangle$

$$\langle O_S \rangle = \sum_i w_i \langle \gamma_i | O_S | \gamma_i \rangle$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Bildg. v. Erwartungswert in QM,
 zu versch. Zuständen $|\gamma_i\rangle$

diagonalisierte
 Dichtematrix:
 $\sum_i w_i = 1$
 $w_i \in [0, 1]$

Jede stat. Physik wird mit \sum_i über ein Ensemble $\{|\gamma_i\rangle\}$
 mit der Wahrscheinlichkeit w_i kodiert über
 die Quant. Erwartungswert $\langle \gamma_i | O_S | \gamma_i \rangle$ gemittelt.
 resultiert an Umgebung, so ist es abgeleitet.

c) w_i ist zeitlich konstant und z.Z. unbekannt
 die Werte zeitlich konstant bis Messg. erfolgt

d) reiner Zustand : $w_{i_0} = 1$, alle andere sind $w_i = 0$

kann nur ohne Umgebg. beobachtet werden,
kann i.a. nicht präpariert werden

$$\begin{aligned}\langle O_S \rangle &= \text{sp}(\rho O_S) = \text{sp}(|\psi_{i_0}\rangle \langle \psi_{i_0}| O_S) \\ &= \sum_u \underbrace{\langle u | \psi_{i_0} \rangle \langle \psi_{i_0} | O_S | u \rangle}_{\text{Identität}} = \langle \psi_{i_0} | O_S | \psi_{i_0} \rangle \\ &\quad \uparrow \text{Ohne Umgebg.}\end{aligned}$$

gemischter Zustand

weil keine exakte Präparation möglich ist,
sind in allgemeinen mehrere $w_i \neq 0$

2.1.5. Beispiel f. gemischte Zustand

Photon mit 2 senkrecht polarisierten ugl.: $|\uparrow\rangle, |\rightarrow\rangle$

reiner Zustand: $|\psi_{i_0}\rangle = a|\rightarrow\rangle + b|\uparrow\rangle$

mit a, b beliebig aber $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$$\rho_{\text{reiner}} = |\psi_{i_0}\rangle \langle \psi_{i_0}| =$$

$$(a|\rightarrow\rangle + b|\uparrow\rangle)(a^* \langle \rightarrow| + b^* \langle \uparrow|) =$$

$$aa^* |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + ab^* |\rightarrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$+ a^*b |\uparrow\rangle\langle\rightarrow| + bb^* |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$\rho_{uu'} = \begin{pmatrix} |a|^2 & ab^* \\ a^*b & |b|^2 \end{pmatrix}$$

f. rein Zustand,
 a, b belieg. : $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $1, 0$

$$u=1 = |\rightarrow\rangle$$

$$u=2 = |\uparrow\rangle$$

gemischtes Zustand

$$\rho = \sum_i w_i |\gamma_i\rangle\langle\gamma_i|$$

$$= \frac{1}{3} |\rightarrow\rangle\langle\rightarrow| + \frac{2}{3} |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$a=1$$

$$b=1$$

$$b=0$$

$$a=0$$

Gemischtes \perp Zustand polarisiertes Licht.

$$\rho_{uu'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Kritik für Unterscheidung.

man berechne $\text{tr}(\rho^2)$,

wenn $\text{tr}(\rho^2) = 1 \Rightarrow$ reiner Zustand

$\text{tr}(\rho^2) < 1 \Rightarrow$ gemischter Zustand

weil ;

$$\text{tr}(\rho^2) = \sum_i w_i^2 \rightarrow = 1 \text{ wenn nur } 1 w_i \text{ besteht}$$
$$\rightarrow \leq \left(\sum_i w_i\right)^2 = 1$$

2. 16. Aufgabe der statistischen Physik

mindestens 4 Aufgabe

1) Gleichg. für $\rho(t)$ bestimmen, und lösen

$$\rightarrow \underline{\text{sp}(\rho(t) O_s)} = \langle O_s \rangle$$

$$\text{analog zu Schrödinger } \langle \Psi | O_s | \Psi \rangle = \langle O_s \rangle$$

2) Anfangsbedingung für die Gleichg. festlegen,
ist identisch mit der Festlegung der w_i

3) w_i soll nicht komplexwertig sein,

Ansatz $(\sum_b \dots)$ soll in seine
 Parameter (T, μ, \dots) gepackt werden

4/ Anwendungen

2.2. Dynamik der statistischen Operatoren

$$\rho = \sum_{\alpha} w_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}|$$

wissen $i\hbar |\dot{\varphi}_{\alpha}\rangle = H |\varphi_{\alpha}\rangle$ von rechts
 $|\cdot \langle \varphi_{\alpha}| w_{\alpha}$

konjugiert: $-i\hbar \langle \dot{\varphi}_{\alpha}| = \langle \varphi_{\alpha}| H$ von links
 $|\cdot w_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle$

Differenzial:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (w_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}|) = w_{\alpha} (H |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}| - |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}| H)$$

\sum_{α} nehmen:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho] \rightarrow \langle O_s \rangle = \text{tr}(\rho O)$$

Bewegungsgleichg. d. Dichteparameters ρ (von Heisenberggl.)
 ersetzt die Schrödingergl. in der relativistischen Physik.

2.2.2. Interpretation und Bezugspgltig d. Dichtematrix

$$\langle O \rangle = \sum_{u, u'} p_{uu'} \langle u | O | u' \rangle$$



? wie sehen die „Kohärenz“ aus?

wie p_{uu} , $p_{u'u}$ interpretiert?

Gene Messg. an Observablen mit Eigf. L -eigenzustand $|u\rangle$ gerichtet und vor $|u\rangle$ vorliegt, so ist

$\langle u | u \rangle \langle u | u \rangle = |c_n|^2$ die Wahrscheinlichkeit,
da System in Zustand $|u\rangle$ zu finden

offenbar ist $|u\rangle \langle u|$ der Operator f. d. d. Wahrsch. abh.

Übersage auf Statistik:

$$\begin{aligned} \text{sp}(p |u\rangle \langle u|) &= \sum_j \langle j | \sum_i w_i | \gamma_i \rangle \langle \gamma_i | u \rangle \langle u | j \rangle \\ &= \sum_i w_i \langle u | \gamma_i \rangle \langle \gamma_i | u \rangle = \langle u | p | u \rangle = p_{uu} \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente des statistischen Operators p_{uu}

sind die Wahrscheinlichkeit, das System in Zustand $|u\rangle$ zu finden.

gleich. f. Diagonalelemente: $i\hbar \dot{p}_{ij} = [H, p] \quad | \langle u | \dots | u \rangle$

$$i\hbar \dot{p}_{uu} = \langle u | \underbrace{H p - p H}_{1 = \sum_u |u\rangle \langle u|} | u \rangle$$

$$\| i\hbar \dot{p}_{uu} = \sum_u (H_{uu} p_{uu} - p_{uu} H_{uu}) \quad (1)$$

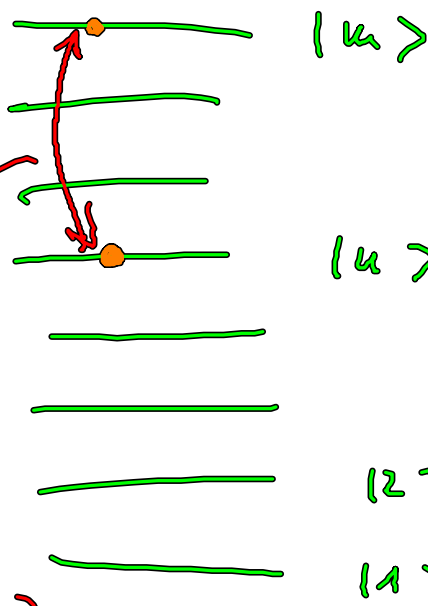


Die Wahrscheinlichkeit das System in $|u\rangle$ zu finden kann mit dieser gleich. berechnet werden, $H_{uu} = \langle u | H | u \rangle$ allerdings: sind verknüpft mit den nicht diagonalen p_{uu}

$$\| i\hbar \dot{p}_{uu} = \sum_i (H_{ui} p_{iu} - p_{ui} H_{iu}) \quad (2)$$

(1+2) bilden die Diagonalgleichungen.

Interpretation



$P_{un} \hat{=} \text{Wahrscheinlichkeit System}$
in Zustand $|u\rangle$ zu finden

$P_{nu} \hat{=} \text{Wahrscheinlichkeit System}$
in Zustand $|n\rangle$ zu finden

Wahrscheinlichkeit
amplitude daß
System von $|n\rangle \rightarrow |u\rangle$
übergeht.

(z.B. durch zeit abhängige Felder)