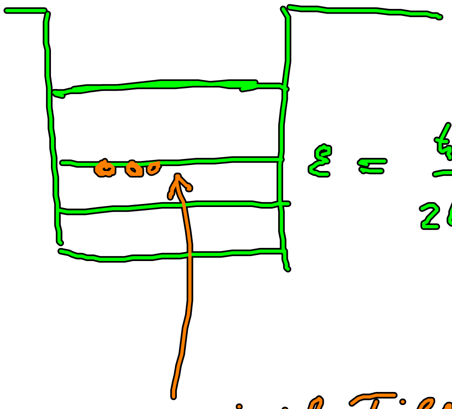
3.1.4. Maxwellverteilung

hatten die Maxwell-Boltzmann-Verteilung für klassisches Gas kennengelernt:

$$f_\varepsilon = e^{-\varepsilon\beta} e^{\beta\mu}$$

ε : Einteilchenenergien im System ($\equiv \varepsilon_k^0$)

beschreibt die mittlere Zahl von Teilchen in einem ausgewählten Zustand $|\varepsilon\rangle$, bzw $|n_x, n_y, n_z\rangle$:



$$\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2L^2m}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)$$

- wieviel Teilchen sind hier im Mittel ($\ll 1$ ≙ klassisch ohne Mehrfachbesetzungen)
- $f_\varepsilon \sim e^{-\beta\varepsilon}$ $\xrightarrow{}$ $\beta = \frac{1}{kT}$ für T ↑ wächst f_ε

jetzt mit Hilfe der sogenannten Maxwellverteilg. Mittelwerte

<u>einfacher</u> berechnen:

hatten $\langle N \rangle$ definiert

$$\langle N \rangle = \left(m \frac{L}{\underline{\underline{2\pi\hbar}}} \right)^3 \int d^3v \, \underline{\underline{e^{-\beta \frac{mv^2}{2}} e^{\beta\mu}}}$$

also Def. über Verteilg. der Geschwindigkeiten v

andere Mittelwerte, z.B von $A(v) \mathrel{\hat{=}}$ Funktion von v

$$\langle A \rangle = \boxed{\frac{1}{N}} \int d^3v \, A(v) \, \underline{\underline{f(v)}}$$

Eigenschaft pro Teilchen, damit normiert

$=1$ für Teilchenzahl

$$= \int d^3v \text{ alle Teilchenzahlen bei } v \text{ mal Größe } A(v)$$

Winkelintegral

$$\langle A \rangle = \int dv \, \frac{v^2}{N} 4\pi \left(m \frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 e^{-\beta \frac{m}{2} v^2} \underbrace{e^{\beta\mu}} A(v)$$

verwenden Kugelkoordinaten

(gut für $|\vec{v}| = v$)

$A(|\vec{v}|)$

chemisches Potential aus letzter VL

$$n_0 \cdot \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{3/2}$$

Teilchendichte N/V

$$\langle A \rangle = \int dv \; f_{Max}(v) \; A(v)$$

$$\boxed{f_{Max}(v) = 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}}$$

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

Bemerkungen

a) f_{Max} kann zum Berechnen von Mittelwerten nach obiger Formel $\int dv \; f_{Max}(v) \; A(v)$ der Größe $A(v)$

Beispiel $\langle v \rangle = \int dv \; f_{Max}(v) \; v$

mittlere Geschwindigkeit der Teilchen

$$A(v) = |\vec{v}| = v$$

$$= 4\pi \int^{\infty} dv \, v^3 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$$

einfachst Mgl: $v^2 = x$ setzen $\sim \int dx \, x \, e^{-x}$

und einfacher, Nachschlagen:

$$= \left(\frac{3kT}{m} \right)^{1/2}$$

$\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$ mittlere Geschwindigkeit ↑, wenn T ↑

b) $f_{max}(v)$ interpretiert als

$f_{max}(v) \, dv$ als die Wahrscheinlichkeit interpretieren

als mittlere Teilchenzahl mit dem Betrag der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$

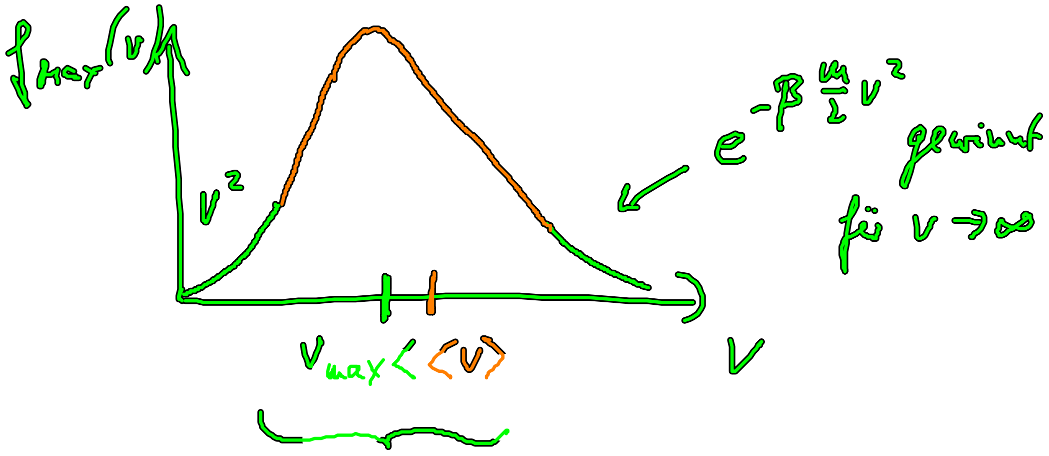
zu finden im Intervall $[v, v+dv]$

$\longrightarrow$ analog zu QM $|\psi(\vec{r})|^2 \, dV$

c) wahrscheinlichste v, das man finden kann?

$$v_{max} = \left(\text{durch Ableitg. Null setzen} \right) = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2}$$

d) Skizze zur Maxwellverteilung:



Maxwellverteilg. ist asymmetrisch

e) <u>Bsp</u> O_2 - Teilchen, Masse bekannt

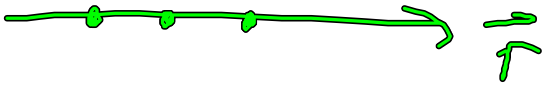
$20°C$, $kT \approx \frac{1}{40} eV$

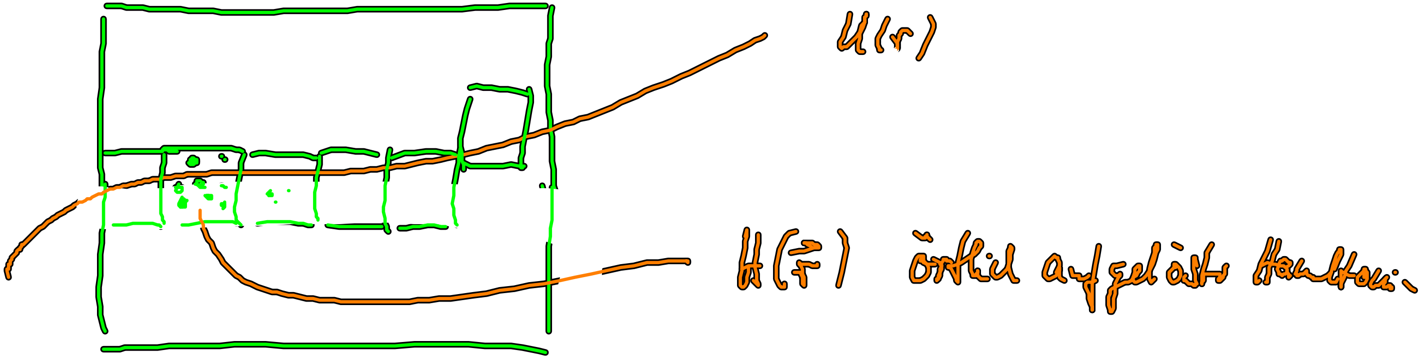
einige $100 \frac{m}{s}$ für $\langle v \rangle$.

3.15. Externe Felder

schwach veränderliche Felder und Stabilität

Feld $U(\vec{r}, \cancel{t})$, U soll auf $\vec{r}$ sehr langsam variieren





In jedem Kasten $U(\vec{r})$ muß man noch viele Teilchen haben die ein eigenes Ensemble an diesem Ort bilden haben

≙ räumliche langsame Änderung

$$H(\vec{r}) = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + V_{Kasten}(\vec{r}_i) \right) + \sum_i U(\vec{r}_i)$$

$\vec{r}_i$ sind Teilchen am Ort $\vec{r}$ in einem Ensemblekasten

$$= (\text{ freie Teilchen im Kasten }) + (\text{ Potential } U \;)$$

$$= H_0 + \sum_i U(\vec{r}_i \approx \vec{r}) = H_0 + N_n U(r)$$

$\nearrow$

$\sum_i = N_n$

$\nearrow$

Teilchenzahl im Kasten

$$Z_{gk}(\vec{r}) = \sum_{n, N_n} e^{-\beta \left(\underbrace{\varepsilon_n - \mu N_n + U(r) N_n}_{\varepsilon_n - (\mu - U(r)) N_n} \right)}$$

alte Zustandssumme völlig analog, das Potential wird dann

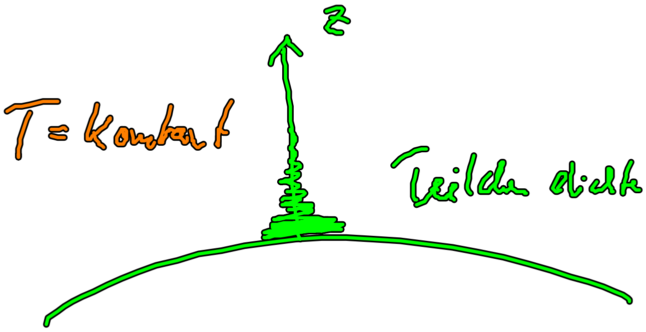
$$\mu \to \mu - \underset{\uparrow}{U(\vec{r})}$$ eingebaut.

ist wenn langsam genug

Ein Beispiel

$U(\vec{r}) = mgz$ Schwerefeld der Erde

(Gravitationspotential)



Teilchendichte als Funktion von Höhe z

→ nullte Näherung zur barometrischen Höhenformel

ohne U:

$$N = \frac{V}{\lambda_{th}^3} e^{\beta\mu} \quad \text{(letzte VL)}$$

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{e^{\beta\mu}}{\lambda_{th}^3}$$

und U

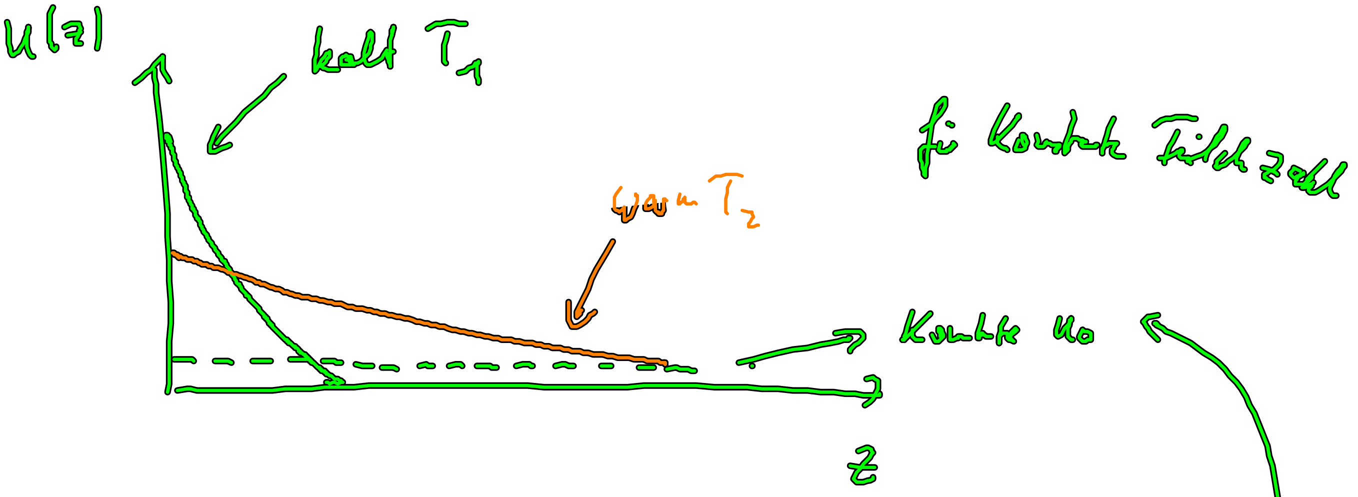
$$n_0(z) = \frac{e^{\beta(\mu - U)}}{\lambda_{th}^3} = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

Regel $\mu \to \mu - U(z)$

$$\boxed{n_0(z) = n_0 \, e^{-\frac{mgz}{kT}}}$$

Barometrische Höhenformel für T = konstant

↗ Dichte am Ort $z = 0$



Je größer T umso geringer ist der Einfluß des Schwerefelds, d.h. dann gewinnt die thermische Energie gegen das Schwerefeld. ----

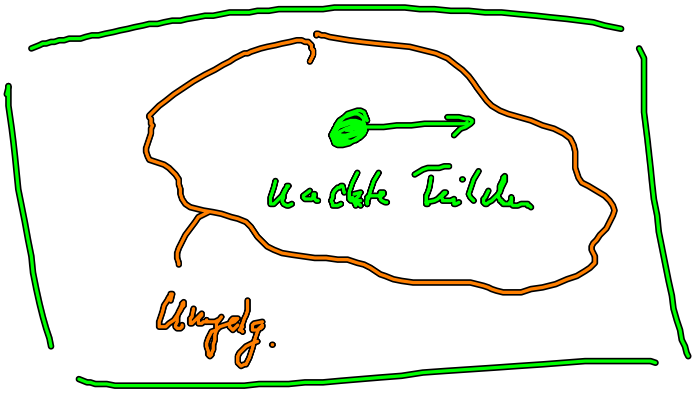
3.2. Masselose Bosonen

Beispiele: Photonen, Phononen (ganzzahliger Spin)

Photonen sind Quasiteilchen zum elektromagnetischen Feld: sie haben Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$, aber wird in teilchenartigem Oszillatorbild beschrieben

⇒ „Quasiteilchen"

allgemein: Landau: Kamel in Wüste

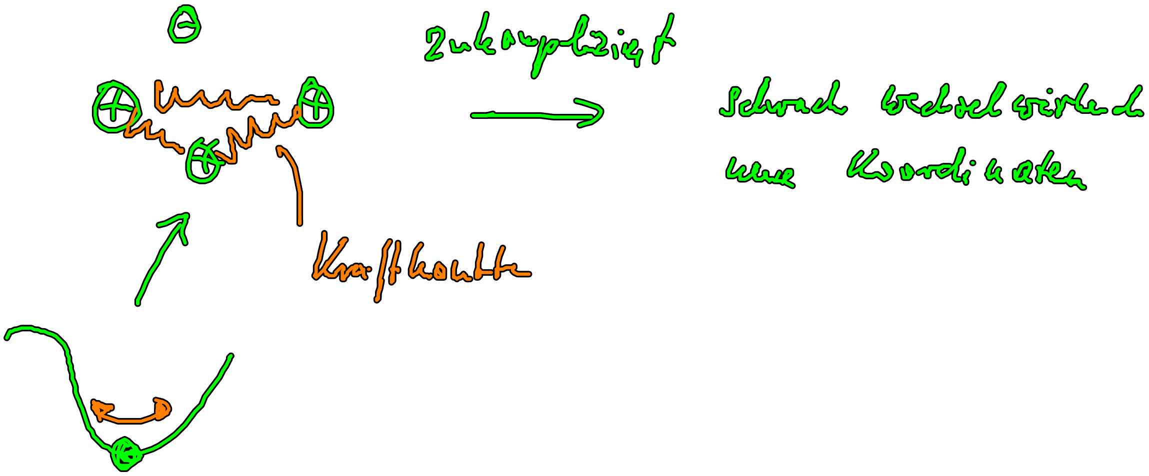


„dressed particle"

Teilchen + Umgebg = Quasiteilchen

Phononen sind kollektive Anregungen des Ionensystems in Festkörper und Molekülen (Vibronen).

Man spricht von kollektiven Anregungen weil man stark gekoppelte System (einzelne Ionen) mit kollektiven Koordinaten beschreibt.



Bsp.:

2 gekoppelte Pendel ⟶ 2 neue, freie, ungekoppelte Oszillationen

(nicht mehr Einzelobjekt zu zu ordnen)

warum masselos?

Am Hamiltonian wird man sehen, daß die Teilchenzahl N nicht auftaucht

massebehaftet: $$H = \sum_{i=1}^{N_T} \frac{p_i^2}{2m_i}$$

N_T ← Teilchen

$2m_i$ ← abzählbar über Masse

masselos: $$H = \sum_{\text{Schwingungen}}^{\text{Anzahl}} \cancel{m_i}$$

Dabei spricht man von masselosen Anregungen:

$$\frac{\partial}{\partial N} F \underbrace{= 0 = -\mu}$$

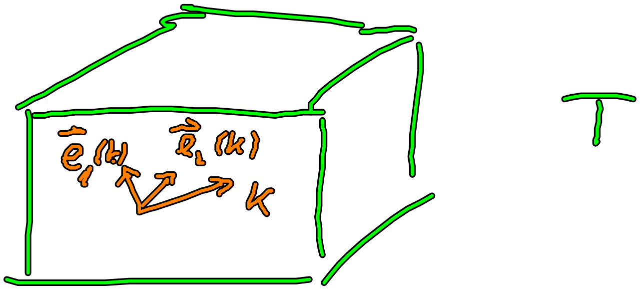
$\mu = 0$ für masselose Anregungen

(kanonisch ← großkanonisches Rechnen)

Zahl masseloser Anregungen (Oszillatoren) können nur durch externe Parameter (z.B. T) festgelegt werden, nicht durch Einsperren einer bestimmten Zahl v. Teilchen im Kasten.

3.2.2. Photonen als Quanten d. Strahlungsfelds

Kasten ≙ Resonator, groß



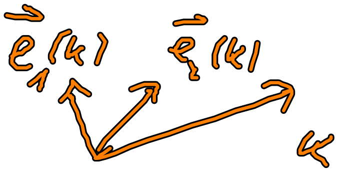
Jede Lösung $\vec A(r,t)$ (Vektorpotential) kann durch eine Superposition ebener Welle dargestellt werden:

$$\Delta \vec A - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec A = 0$$

→

Wellengleichung für $\vec{A}$ kann man mit

Ansatz
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda(k)=1}^{2} \underbrace{\overbrace{\vec{e}_{\lambda(k)}(k)\,\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}}}^{f_{k\lambda}}}_{\text{vollständiges System}} \underbrace{q_{k\lambda}(t)}_{\text{Entwicklungskoeffizienten}}$$



einsetzen in Wellengleichung:

$$\sum_{k,\lambda} \Big(\underbrace{i\vec{k}\cdot i\vec{k}}_{\Delta\text{-Wirkung}}\, q_{k\lambda} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\,\ddot{q}_{k\lambda}}_{\partial_t^2\text{-Wirkung}} \Big) \vec{f}_{k\lambda} = 0$$

→ weil $\vec{f}_{k\lambda}$ voneinander unabhängig sind

$$\ddot{q}_{k\lambda}(t) + c^2 k^2 q_{k\lambda}(t) = 0$$

Das ist eine Oszillatorgleich. für alle möglichen ebenen Wellen mit Amplitude $q_{k\lambda}$ im System

Anfangsbedingungen bestimmen das elektromagn. Feld.

Oszillatorgl. können sie quantisieren (QM I):

Leiteroperatoren f. den harmonischen Oszillator,

bzw. auch für viele Oszillatoren:

$$H = \sum_{k,\lambda} \hbar\omega_k \left(a^+_{k\lambda} a_{k\lambda} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\downarrow$$

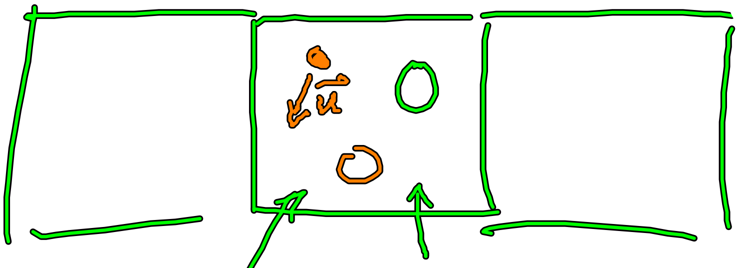
$$\omega_k = c|\vec{k}|$$

Darstellg. der Oszillatoren durch Leiteroperatoren:

$$[a_{k\lambda}, a^+_{k'\lambda'}]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{Bosonen}$$

3.2.3. Phonon als Quanten d. Ionengitter im Festkörper

periodische Anordnung v. Elementarzellen



1 ... p verschiedene Atome / Ionen

$\vec{r}_n$ zeigt auf periodisch fortgesetzte Zelle,

an viele Zellen → Festkörper

⟹ periodischer Festkörper

Gleichung für Auslenkung $\vec{u}$:

$$\underline{\underline{m_s \ddot{u}_s^\alpha(n)}} = -\sum_{\beta,t,m} K_{st}^{\alpha\beta}(nm)\, u_t^\beta(m)$$

Auslenkung des s-ten Atoms in der n-ten Elementarzelle in Richtung α (x, y, z) mit Masse m_s des Atoms

rücktreibende Kraft durch alle anderen $u_t^\beta(m)$

Kraftkonstanten sind K

harmonischer Schwg. / Oszillator

Newton - Bewegungsgleichung

verkoppelte Gleichungssystem für alle u's in allen Elementar zellen.