

3.2.5 Photonen

Satz gekoppelter Oszillatoren mit Verbundindex $k = (\vec{k}, \lambda(k))$

\vec{k} - Wellenzahl

λ - 2 Polarisationsrichtungen \perp zu \vec{k}
(für jede \vec{k})

$$Z_k = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda(k)} \left(\frac{e^{-\beta \frac{\omega(k)}{2}}}{1 - e^{-\beta \omega(k)}} \right) \quad \left(\text{Elek VL mit:} \right. \\ \left. \prod_k \rightarrow \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda} \right)$$

Zustandsumme für die spezielle Fall des Photons mit

der Dispersionsrelation: $\omega_{\lambda}(\vec{k}) = c|\vec{k}| \equiv \omega(\vec{k})$

↑

kein Faktor $v = 1$

Dispersions hängt nicht v. Polarisation ab, daher:

$$Z_k = \prod_{\vec{k}} \prod_{\lambda=1}^2 \left(\frac{e^{-\beta \frac{\omega(k)}{2}}}{1 - e^{-\beta \omega(k)}} \right)^2$$

geht in
Potenz über

$$\ln Z_k = -2 \sum_{\vec{k}} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) - \sum_{\vec{k}} \beta \epsilon_k$$

↓
bekannt
frei Energie F

↓
Anteil des Punktes
Energie, liegt in
„Standardmessg.“ nicht
bei.
hierbei Ableit. v. Pot. ϵ_k
nicht bei, z.B. F.

geht jetzt zu kontinuierlich Limit über

$$\sum_{\vec{k}} \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (\text{große Kante, siehe 1. VL})$$

$$\ln Z_k = -2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k})$$

Kugelkoordinaten

Winkelintegration

$$= - \frac{2V kT}{(2\pi)^3}$$

$$\int_0^{\infty} dk k^2 \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_c k})$$

$$x = \beta \epsilon_c k$$

$$\sim \frac{1}{(\epsilon_c \beta)^3} \cdot \text{Zahl}$$

↑ nachschlagen

insgesamt

$$\ln Z_k = \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{(\beta \epsilon_c)^3} \sim \frac{1}{\beta^3}$$

$$\rightarrow F = -kT \ln Z \quad \text{freie Energie als thermodynamisches Potential}$$

$$= - \frac{\pi^2}{45} \frac{V}{\beta^4} \frac{1}{(\epsilon_c)^3}$$

3.2.5.1. Auswertung der Zustandssumme

a) kalorische Zustandsgleichung:

$$E = - \frac{\partial \ln Z_N}{\partial \beta} = \frac{\pi^2}{15} \frac{V}{(4\pi)^3} (kT)^4, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Die Beziehung $E \sim T^4$ heißt Stefan-Boltzmann Gesetz.

(komplett anders als bei idealen Gas: $E \sim T$.)

b) Keimische Zustandsgleichung

$$p = - \partial_V F(T, V, N)$$

↑ masseloses Gas

$$p = kT \frac{\partial}{\partial V} \ln Z_N = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

Es existiert ein Skalenausdruck $p \sim T^4$ auf Wand

ist allerdings sehr klein \sim typisch Wert für Sonnenstrahlung.

$$p \approx 10^{-6} \frac{N}{m^2}$$

c) Plancksche Verteilung:

von oben,
↓ Integral über alle Klassen

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_k = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\pi^2} V \int_0^{\infty} dk k^2 \ln (1 - e^{-\beta \hbar c k})$$

Ziel

$$\frac{E}{V} = \int d\omega u(\omega)$$

↑
Spektrale Energiedichte

ω = ck

↑
Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 \ln (1 - e^{-\beta \hbar \omega})$$

$$= \frac{1}{\pi^2 c^3} \int d\omega \omega^2 \underbrace{\frac{\hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}}_{\hbar \omega \cdot f^B(\hbar \omega)}$$

denn Kegel folgt die spektrale E-Dichte $u(\omega)$

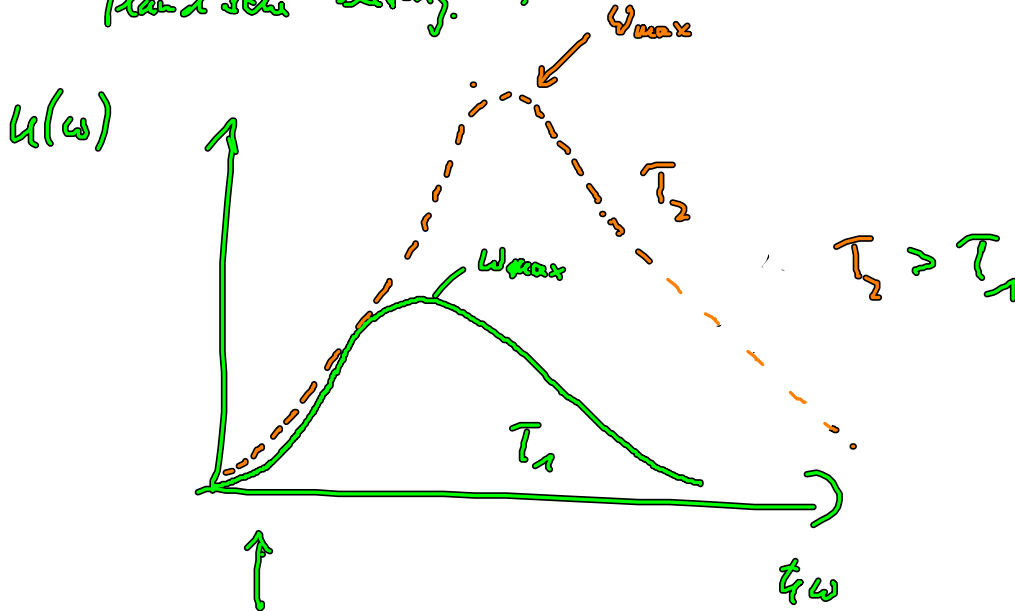
$$u(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2} \frac{\omega^3 / c^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

(1910)

Plancksche Formel für die spektrale E-Dichte
 Spektrum in auf der Temperatur T gehaltenen Systemen.

3.2.5.2. Anwendungen

Plancksche Verteilung:



Singularität v. f^B
 wird durch ω^3 abgefoigt

a) Wiensches Verschiebungsgesetz:

$\omega_{max} = 2,8 kT/h$, kann durch Extremwertaufgabe
 bestimmt werden

bedeutet Farbverändg. des Spektrums

b) Rayleigh-Jeans Gesetz:

klassische Ergebnis: Photen zählt wie bei ideal gas:

$$u_{\text{kl}}(\omega) = \frac{kT}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3}$$

führt zu so großer Energie „ Ultraviolettkatastrophe “

am Planck herleitbar für $T \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow 0$)

$$u = \frac{1}{\pi^2} \frac{h \omega^3 / c^3}{e^{\beta h \omega} - 1} = u_{\text{kl}}(\omega)$$

$$1 + \beta h \omega \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \frac{h \omega}{kT} \rightarrow 0$$

c) Bestimmung v. Oberfläche temperierten emittierenden Körpers:

Spektrum messen, aufsteck an Planck-Verteilung und damit T bestimmen oder über ω_{max} .

Sonne: 5600 K

d) Kosmische Hintergrundstrahlung

Wenn Materie und Licht nicht miteinander wechselwirken

so gilt das sich beide Systeme unabhängig voneinander entwickeln

$$E \sim V T^4 \quad (\text{für Photon})$$

↑
kosmisch Ausdehnung
 $V(t)$

↓
Temperatur ist auch
zeitabhängig da die Gesamtenergie
erhalten ist

$$V \uparrow \rightarrow T \downarrow$$

T weiß sicher, und damit kann man die
Planck verteilung als Funktion der Zeit berechnen
Seit dem Zeitpunkt wo Materie + Licht entkoppelt war.

→ wenn man auch Theorie V, E bekommt kann
man die heutige Temperatur berechnen:

$$T = 2,73 \text{ K}$$

Experimentell beobachtet

e) Treibhauseffekt:

Gesamtenergie konstant das Erdsystem erhitzt durch
Treibhausgas

$$E \sim T^4$$

$$E_{\text{alt}} + 4\% E_{\text{alt}} \sim (T_{\text{alt}} + \Delta T)^4$$

↑
prozentuale Änd. d. E-Strahlung in % der zuvorigen
für

$$T_{\text{alt}}^4 \left(1 + 4 \frac{\Delta T}{T_{\text{alt}}} \right)$$

nach Taylor

Etwas ein Zuwachs der Temp. von 1K / 100% E_{alt}.
Schlechtes Modell

3.26. Phononen

Dispersionsrelation f. Oszillatoren, um ϵ_k zu bestimmen

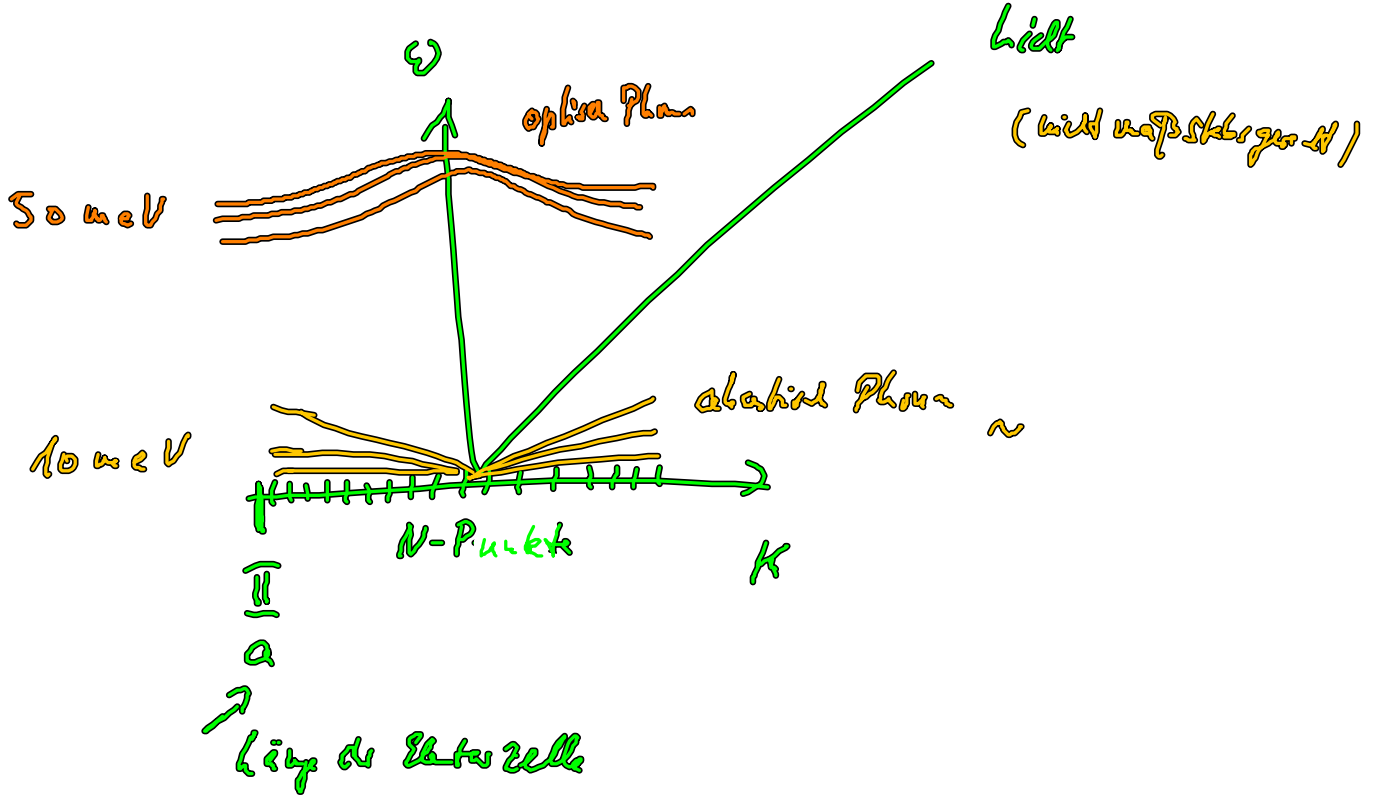
wenn man N Zellen hat mit p -lon pro Zelle so

sagt die klass. Festkörperphysik:

Es gibt $(3p-3)N$ optische Modi

3 akustische Modi

für 2 atomige Zelle $p=2$



3.2.6.1 Phononzustandsumme und Energie

$$E = -\partial_{\beta} \ln Z_k = \sum_{\lambda} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar \omega_{\lambda}(\vec{k})}{2} + \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k}) f^B(\hbar \omega_{\lambda}) \right)$$

\leftarrow $\sum_{\vec{k}}$ \leftarrow alle \vec{k} -Punkte
 \leftarrow \sum_{λ} \leftarrow alle λ -Moden

\downarrow
 Nullplatzenergie
 (wird weglassen)

$$E = \sum_{\lambda=1}^{3p} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\lambda}(\vec{k}) f^B(\hbar \omega_{\lambda})$$

\uparrow
 Summe über alle Moden alle \vec{k} -Punkte

und spezialisiert werden

3.2.6.2. Debye - Modell des spezifischen Wärmes

Später: $c_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$ (Vorgang)

↑
spezifisch Wärmes
ein System
bei konstant Volumen

Debye - Modell : - $p = 1 \rightarrow$ Zustände Modell

- $\omega_{\lambda}(k) = c_0 |\vec{k}|$

↑
 $\lambda = 3$

↑

Schallgeschwindigkeit

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk k^2 4\pi, \text{ mit } \omega = c_0 k$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 c_0^3} \int d\omega \omega^2, \text{ mit } D(\omega) = \frac{V}{2\pi^2 c_0^3} \omega^2$$

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow = \int d\omega D(\omega)$$

↑ Zustandsdichte

einsetzen in die E-Formel

$$E = \sum_{\lambda=1}^3 \int d\omega D(\omega) \frac{\omega_1 \hbar}{e^{2\omega\beta} - 1}, \quad \text{idealer Mode 1}$$

$$= \frac{3V}{2\pi^2 c_0^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \frac{\hbar \omega}{e^{2\omega\beta} - 1}$$

Wie bestimmt man
diese Frequenz?

ω_D -Debye-Frequenz

$$= \frac{3V\hbar}{c_0^3 2\pi^2} I(\omega_D, \beta)$$

↓

kann nicht mehr analytisch
gelöst werden

1) Distribution von ω_D :

$$N = \sum_{\vec{k}} 1 = \int_0^{\omega_D} d\omega D(\omega) = \text{brachte auf alle Verfactoren und umstellte nach } \omega_D$$

bestimmt die k-Zählung ↓ $N \omega^2$

$$\omega_D = \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N}{V}} c_0$$

ist damit bestimmt
als Funktion der Teilzahl dichte in
dem Kristall

2). Diskrete via $\bar{I}(\omega_D, \beta)$:

$$\bar{I} = \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^3 \frac{1}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}$$

neue Koordinate:

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} = \hbar\omega\beta$$

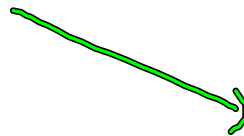
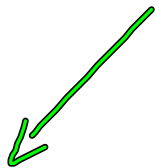
$$= \frac{(kT)^4}{\hbar^4} \int_0^{\hbar\omega_D/kT} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

Debye Temperatur

$$kT_D = \hbar\omega_D$$



hier steht $\bar{E}(T)$ drin.



1. frez fall

Klassisch $T \rightarrow \infty$, $\hbar\omega_D/kT \rightarrow 0$

$$\bar{I} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 \int_0^{\hbar\omega_D/kT} dx \frac{x^3}{1+x-1} \sim T^4 \left(\frac{\hbar\omega_D}{kT}\right)^3 \sim T$$



weil oben frez $\rightarrow 0$

weil hier nur kleine Frequenzen vorkommen

Im klassischen Fall ist E proportional zu T

(Quarz klassische Gas)

2. Grenzfall

$T \rightarrow 0$, Quantenbereich, $\frac{T_0}{T} \rightarrow \infty$

$$I = \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{T_0/T} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \rightarrow \left(\right)^4 \int_0^{\infty}$$

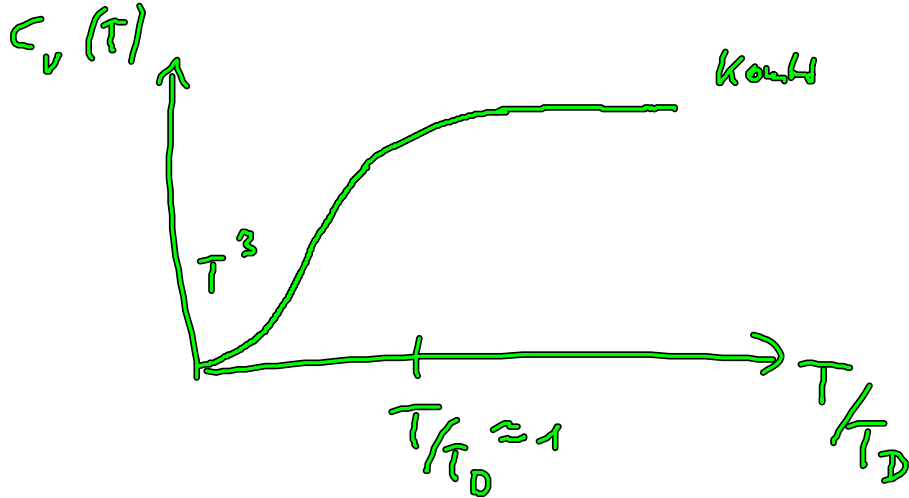
$$I \sim T^4$$

Bemerkung

a) spezifische Wärme $c_v = \partial_T E$ verhält sich

für $T/T_0 \rightarrow \infty$: $c_v \rightarrow \text{konst.}$

$T/T_0 \rightarrow 0$: $c_v \sim T^3$



Bei der Debye-Temperatur findet der Übergang
 zwischen klass. und Quanten-Verhalten statt.

b) T_D (Kupfer) $\approx 363 \text{ K}$

T_D (Blei) $\approx 601 \text{ K}$

c) optisch Phononen $\rightarrow \ddot{u}A$
 sind relevant i.a. bei hohen Temperaturen

d) Kristall: Ionengitter,
 es existiert auch Beitrag d. Elektronengas
 (Fermionen)