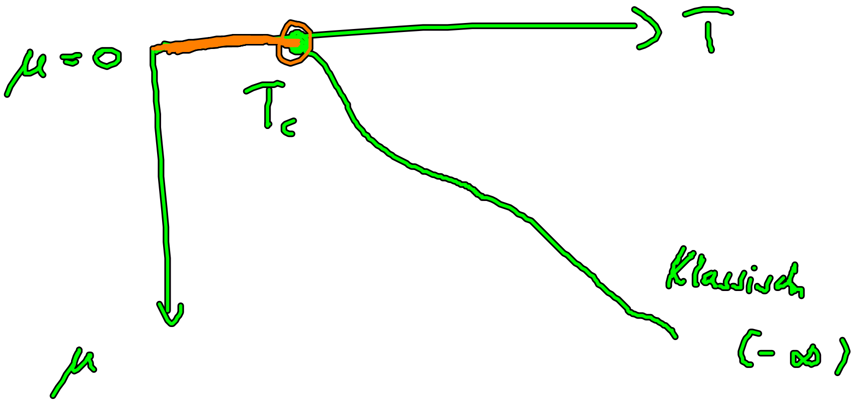
Wiederholung: gesucht $\mu = \mu(n_0, T)$



$$\mu = \mu(n_0, T_c) = 0$$

Frage: Was passiert bei weiterer Abkühlung?

$\mu \geq 0$ führt Singularität in f_k^B

nur $\mu = 0$ wird erlaubt sein und führt zum Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation

3.5.3. Bose-Einstein Kondensation

zeigen zunächst, daß $\mu = 0$ akzeptabel ist,

d.h. die so entstehende Singularität ist nicht unphysikalisch:

$$f_k^B = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1} \;\xrightarrow[\hat{=}\ \varepsilon_k = 0]{\mu=0}\; \frac{1}{1+\beta(\varepsilon_k-\mu)-1} = \frac{1}{\beta\varepsilon_k}$$

„−" macht Singularität erst mögl.

$\varepsilon_k \to 0$

auf ersten Blick: man hat bei $\varepsilon_k = 0$ eine ∞ große mittlere Besetzungszahl ?!

entweder: verbieten oder zeigen, daß unwichtig

↓

geht gut $\mu = 0$

f. $\mu > 0$ geht es nicht

wo kommt der Widerspruch her?

$$N = \sum_k f_k^B \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k \, f_k^B$$

Teilchenzahl

$\underbrace{\text{Thermodynamischer Limes}}$

$V \to \infty$, $L \to \infty$, $\Delta k \to 0$ (zum Integral übergehen)

um zum Integral zu kommen

$N \to \infty$

$n_0 = \frac{N}{V} = \text{konstant}$

es zeigt sich, daß dieser Grenzfall nicht „gut genug" für $\varepsilon_k = 0$ ist:

$$\sum_k \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int dk\, k^2 \quad \text{(Kugelkoordinate)}$$

singulären Punkt $k = 0$, $\varepsilon_k = 0$ ansehen:

$\varepsilon_k \sim k^2$

Beitrag zum Integral:

$$\sim \lim_{\Delta k \to 0} \underbrace{\Delta k\, k^2 f_k^B}_{\text{Beitrag zur Teilchzahl } N \text{ im Streif } \Delta k.} = \lim_{\Delta k \to 0} \Delta k \underbrace{k^2 \frac{1}{\beta \varepsilon_k}}_{k \to 0 \text{ (interessanter Punkt)}} \sim \lim_{\Delta k \to 0} \Delta k$$

$\rightarrow$ dieser Punkt der singulär f_k^B hat wird gar nicht mitgezählt $\rightarrow$ $\mu = 0$ kein Problem bei Berechng. d. Integrals.

$$N = \sum_k f_k^B \longrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \, f_k^B$$

hier wird $k=0$ und mitgezählt

Fehler

hier wird der Term nicht mehr gezählt

Korrektur:

$$N = N_0 + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \, f_k^B$$

Teilchenzahl im Zustand $k=0$ wird eingefüllt wenn $\mu = 0$.

$$N = N_0 + \underbrace{\frac{V}{\lambda_{th}^3} g_{3/2}(z)}_{f(\mu, T)} \quad \text{mit } z = e^{\beta\mu}$$

mit $N_0 = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu} - 1}$ als 1. Term der Summe:

Wann muß man N_0 eigentlich mitnehmen?

1 2

$$N_0 = \frac{1}{z^{-1}-1} = \frac{z}{1-z}$$

$$z = e^{\beta\mu}$$

definieren wir die Dichte im Zustand $k=0$

$$\rho_0 = \frac{N_0}{V} = \text{konstant} \quad \text{fordern}$$

$$V\rho_0 = \frac{z}{1-z} \longrightarrow z = \frac{\rho_0 V}{\rho_0 V+1} = e^{\beta\mu}$$

wann wird $\rho_0 \neq 0$ bzw $\rho_0 = 0$?

1) $\rho_0 \neq 0$, aber endlich : td. limes $V \to \infty$, $z = \frac{\rho_0 V}{\rho_0 V+1} = 1$

$$\boxed{\rho_0 \neq 0 \text{ für } \mu = 0}$$

2) $\rho_0 = 0$: td. limes $V \to \infty$, $z = \frac{\rho_0 V}{\rho_0 V+1} = \frac{?}{?+1} < 1$

$$\boxed{\rho_0 = 0 \text{ für } \mu < 0}$$

also zusammenfassend:

- Im thermodynamischen Grenzfall ist ρ_0 die Dichte der Teilchen im Zustand $k=0$ nur dann von Null verschieden, wenn der Parameter $e^{\beta\mu}=1$, also $\mu=0$ ist.

  Dies gilt mit Sicherheit bei $T=T_c$.

- Wenn man das System weiter abgekühlt wird $T<T_c$ bleibt $\mu=0$ eine Lösung und $\rho_0 \neq 0$.

  ρ_0 muß aber berechnet werden $\rho_0 = \rho_0(T)$.

$$n_0 = \underbrace{\rho_0(T)}_{\text{überlegg. heute}} + \underbrace{\frac{g_{4/3}(z)}{\lambda_{th}^3}}_{\text{lokale VL}} = \begin{cases} g_{3/2}(z)/\lambda_{th}^3(T) & \text{für } T > T_c \\ \rho_0(T) + g_{3/2}(1)/\lambda_{th}^3(T) & \text{für } T \le T_c \end{cases}$$

$\mu = 0, \; z = 1$

– Anteil der Teilchendichte in $k=0$ an der Gesamtteilchendichte ist:

$$\frac{\rho_0}{n_0} = \frac{n_0 - g_{3/2}(1)/\lambda_{th}^3}{n_0} \qquad (T \leq T_c)$$

$$= 1 - \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_{th}^3 \, n_0} \, \frac{\lambda_c^3}{\lambda_c^3} \qquad \lambda_c = \lambda_{th} \quad (T = T_c)$$

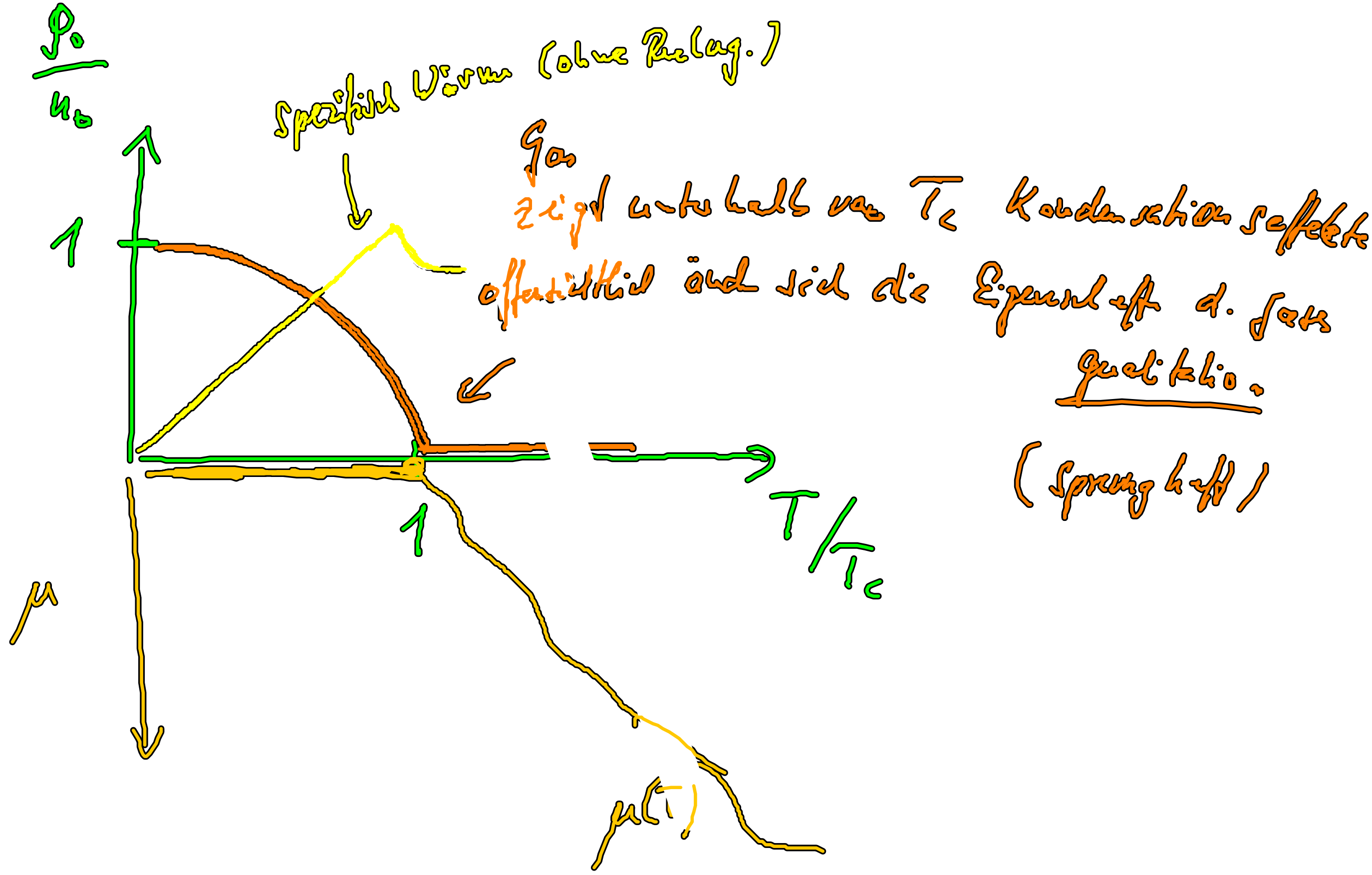
$$= 1 - \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_{th}}\right)^3 \qquad \left(\lambda_c^3 = g_{3/2}(1)/n_0\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}$$

Der Anteil der ρ_0-Dichte zur Gesamtdichte n_0 ist:

temperaturabhängig:

$$\frac{\rho_0}{n_0} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \qquad T \leq T_c$$



Interpretation und Bemerkungen:

a) chemisch Potential der Boseverteilung kann ≤ 0 sein.

b) bei Temperaturen unterhalb von T_c sammelt sich ein endlich großer Bestandteil der Gesamtteilchendichte bei $k=0$ $(\varepsilon=0)$ an. Bei $T=0$ alle.

Dieser Prozeß wird Bose-Einstein Kondensation genannt (1925).

c) Warum Kondensation?

analog zu gasförmig $\to$ flüssig

$$p = \frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V} \sim \frac{1}{V}\sum_k \varepsilon_k f_k^B \underset{T\to 0}{=} \frac{\varepsilon_0 N_0}{V} + \cancel{\int dk \ldots}$$

weil $\varepsilon_0 = 0$ ist, verschwindet der Druck!

$k = 0$, $\varepsilon = 0$ bedeutet, daß die Teilchen keinen Impuls haben, stoßen <u>nicht</u> gegen die Wand.

(<u>liegen</u> rum) $\rightarrow$ <u>Kondensation</u>

d) umgekehrte Vorstellung auch okay:

wenn man bei konstanter Temperatur die Teilchendichte n_0 immer weiter erhöht, findet ab einer kritischen Teilchendichte $n_c = \frac{g_{3/2}(1)}{\lambda_{th}^3(T)}$ Bose-Einstein Kondensation statt weil $T_c \sim n_0^{2/3}$.

e) Experimente: 1995 Li, Na - Atome

einige Tausend Atome in magnetischen Fallen

$T_c \sim 10^{-7}\,K$