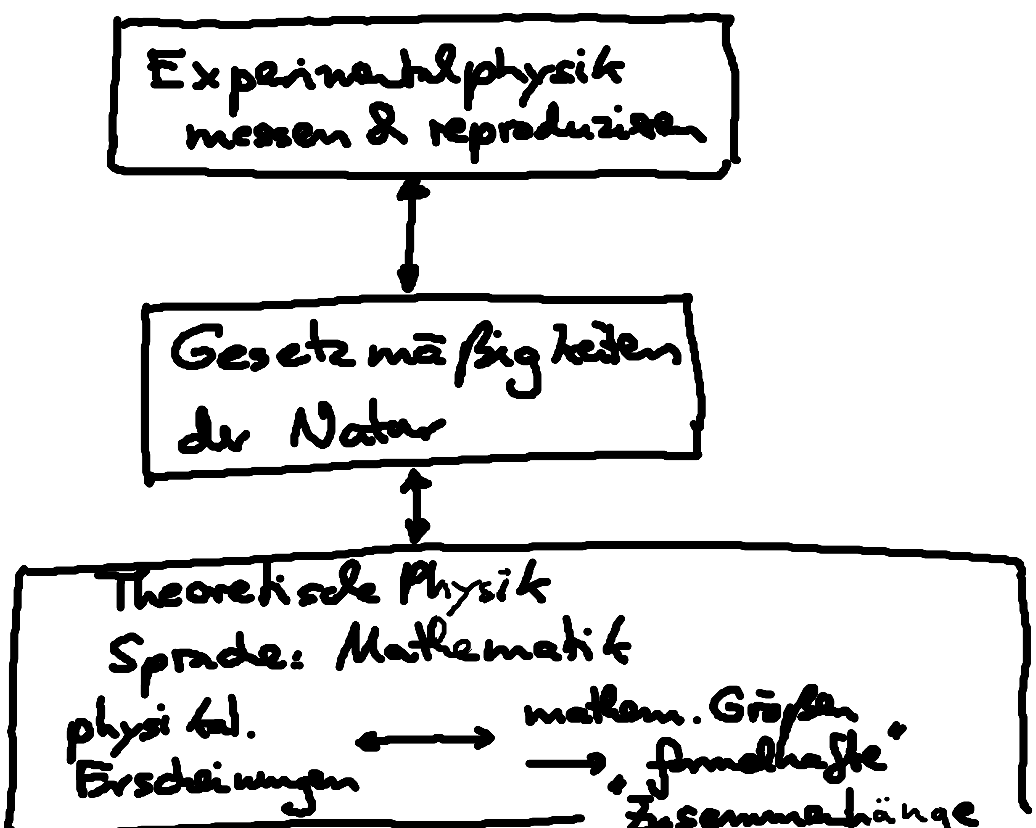
Mathematische Methoden der Physik

- Dozent: Holger Stark, EW 709, Holger.Stark@tu-berlin.de
- Modul des Bachelor-Studienganges; Beginn der Ausbildung in TP: KM, QM1, ED, Th/StM
- Vorlesung über e-Kreide!

1. Vorbemerkungen

- Physik (gr: φυσική = physike = „die Natürliche") beschreibt und „erklärt" Naturerscheinungen



Bsp 1: $\underline{v}, \underline{F}, \underline{a}, m \longrightarrow \underline{F} = m\underline{a} = m\frac{d\underline{v}}{dt}$ ... Newtonsche Grundgleichungen

Bsp 2: Einsteinsche Feldgleichung

$$\underline{\underline{G}} = \kappa\, \underline{\underline{T}} \quad (1.1)$$

[Verallgemeinerung von $\underline{a} = \frac{1}{m}\underline{F}$]

Einsteintensor
Krümmung, Metrik
$\longleftrightarrow$ Geometrie des Raumes

Einsteinsche Grav. konstante

Energie-Impuls-Tensor
Energie und Kräfte

- Vorlesung: Einführung in die Sprache der (Theoret.) Physik

- mathem. Größen:

(i) Skalare = Zahlen: Temp. T, elektr. Ladung, träge Massen, komplexe Wellenfkt. Ψ der QM (nicht-relativ.)

...

Achtung: $\boxed{\text{Pseudoskalar: ändert sein Vorzeichen unter Raumspiegelung}}$

Bsp: - wichtig in Elementarteilchenphysik
- Spatprodukt (später)
- Helizität einer Schraube

Rechts (+1) $\xrightarrow{\text{Spiegelung}}$ Links (−1)

(ii) Vektoren: Geschw. $\underline{v}$, Kraft $\underline{F}$, elektr./magnet. Feld, Vierervektor der RT (4D-Raum)
Spinoren in der relativist. QM!

also: Rechnen mit Vekt. $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Vektoralgebra}}$

(iii) Tensoren:

geometr. Deutung: $\underline{a} \longrightarrow \underline{\underline{T}}\,\underline{a}$

also: $\boxed{\text{Tensoralgebra}} \longleftrightarrow$ Matrizen

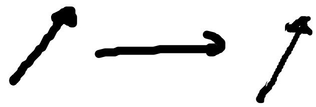
- Skalare, Vektoren, Tensoren sind an Pkte $\underline{r}$ im Raum angeheftet $\longrightarrow$ Felder: $T(\underline{r}),\ \underline{v}(\underline{r}), \dots$

  Raum: 3D, 4D (RT), 10/26 D (Stringtheorie)

- Beziehungen zwischen Raumpktn?

  (i) Paralleltransport eines Vektors!

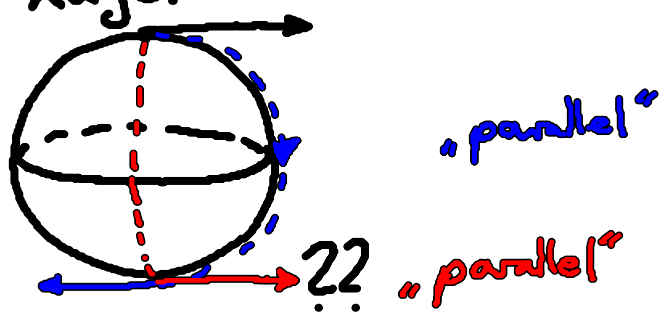
  a) „trivial" im „flachen" Raum = unser Erfahrung



[↯ GPS: Korrekturen durch relativist. Raumkrümmung]

  b) nichttrivial in gekrümmten Räumen (ART):

  Bsp: Kugel



  (ii) räumliche Veränderung von physikal. Größen:

  Differenzieren:

  Bsp: $\frac{d\underline{v}}{dx} \approx \frac{\underline{v}(x+\varepsilon)-\underline{v}(x)}{\varepsilon}$ $\longrightarrow$ (i) wichtig

  $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Vektor-/Tensoranalysis}}$

  [nur flache Räume]

- „formelhafte Zusammenhänge"

  $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Differentialgleichungen = Gesetze der Physik}}$

  Bsp: $\underline{F} = m\underline{g} \longleftrightarrow m\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} - \underline{F}(\underline{r}) = 0$ (1.2)

$\longrightarrow \underline{r}(t) \ldots$ Raumkurve eines Punktteilchens

- Literatur: Vorlesung „selbergestrickt"
  Vorlesungsmitschrieb (e-Kreide)
- Zeit: Do $8^{30} - 10^{00}$ (EW 203/201)
- Internet: www.itp.tu-berlin.de/stark $\longrightarrow$ Lehre
  $\longrightarrow$ Zugang zu e-Kreide-Skripte
  $\longrightarrow$ Übungen
- Übungen: Übungsleiter Ken Lichtner (EW 266)
  Andreas Zöttl (EW 702)

  Tutoren: Benjamin Regler
  Christian Fräßdorf
  Andrea Vüllings

  Online-Anmeldung: bis 13.4.11 ✓

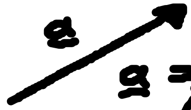
  Beginn: Mo. 18. / Di. 19.4
- „Appell" ! $\longrightarrow$ Vorlesungsbesuch!
  $\longrightarrow$ Nachbearbeiten der Vorlesung

2. Vektoralgebra

- vom Konkreten zum Abstrakten!

2.1 Vektoren für Physiker (in 3D)

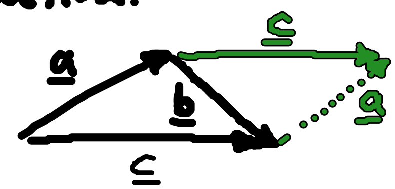
- „Regeln":
  (1) Vektor: Richtung & Länge (Bsp: Kraft, Geschw.)



$\underline{a} = |\underline{a}|\,\hat{\underline{a}}$ ← Einheitsvektor: Länge 1

Betrag: $a = |\underline{a}|$

(2) Addition:



$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} = \underline{b} + \underline{a}$ (2.1)

„kommutativ"

(3) Multiplikation mit Skalar:

$p\underline{a} = p|\underline{a}|\,\hat{\underline{a}}$ (2.2)

(4) Skalarprodukt: „Längen von, Winkel zwischen Vektoren"

$\underbrace{\cos\varphi\,|\underline{b}|}$

Projektion von $\underline{b}$ auf die Richtung von $\underline{a}$

$$\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\varphi} \quad (2.3)$$

(i) $\underline{a} = \underline{b}$: $\varphi = 0 \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{a} = |\underline{a}|^2$

… Länge

(ii) $\underline{a} \perp \underline{b}$: $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

… „senkrecht stehen"

Beachte: $\boxed{(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}}$ (2.4)

- (1)–(4): $\longrightarrow$ euklidischer Vektorraum (später)

  Beweis: Übungen?

2.1.1 Orthonormal-Basis

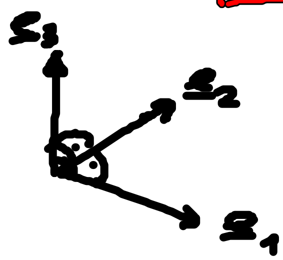
• spezielles Set von Vektoren:

Def:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \text{ ... Einheitsvektoren} \\ 0, & i\neq j \text{ ... orthogonal} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Kronecker Symbol

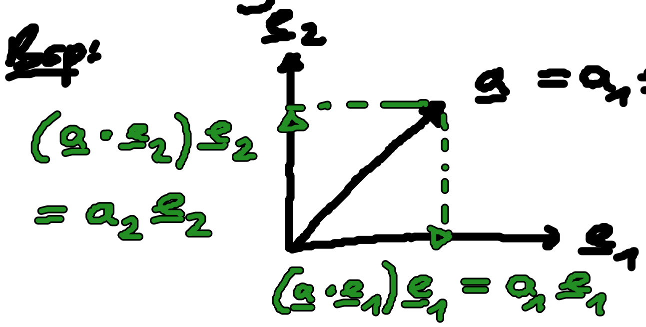
3D: $i,j = 1,2,3$



Konvention: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ ... Rechtssystem [Rechte-Hand-Regel]

• Darstellung eines Vektor in Basis:

Bsp:



$\underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2$

also:

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \qquad \text{mit } a_k = \underline{a}\cdot\underline{e}_k \text{ ... } k\text{-te Komponente von } \underline{a} \qquad (2.6)$$

in Zukunft: Einsteinsche Summenkonvention: „Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert!"

Konsistenz:

$$a_k = \underline{a}\cdot\underline{e}_k = (a_i\,\underline{e}_i)\cdot\underline{e}_k = a_i\,\underbrace{\underline{e}_i\cdot\underline{e}_k}_{\delta_{ik}} = a_k \quad ✓$$

- Skalarprodukt in Komponenten:

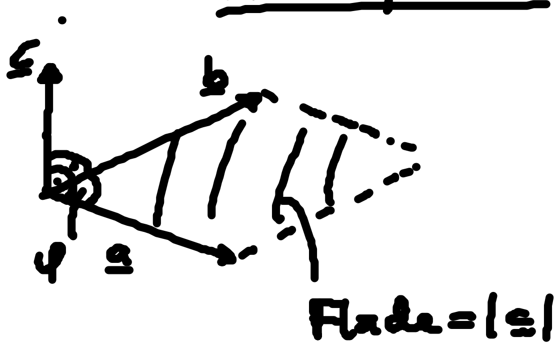
$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{(G.4)}\\ \text{bzw. Bilinearität}}}{=} a_i\, b_j\, \underbrace{\underline{e}_i\cdot\underline{e}_j}_{\delta_{ij}} = \underbrace{a_i\, b_i}_{\text{Standard-Skalarprodukt}/\mathbb{R}^3}}$$

- Konvention:

$$\underline{a} = \left\{\begin{array}{l}\text{Vektor im Raum}\\ \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \ \text{(Raum der 3D Spaltenvektoren)}\end{array}\right.$$

2.1.2 Vektorprodukt (äußeres Produkt) Kreuzprodukt

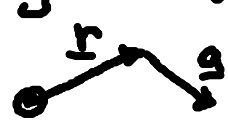
- Geg.:



$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{c} := \underline{a}\times\underline{b} \ \perp\ \underline{a},\underline{b}\\ |\underline{c}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\sin\varphi\\ \underline{a},\underline{b},\underline{c} \text{ bilden ein Rechtssystem}\\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{Rechtsschraube}\end{array}}$$

- Bsp: „Momente":
  bezogen auf Pkt. im Raum:

$\underline{r}\times\underline{a}$



(1) Drehimpuls eines Punktteilchens: $\underline{a} = \underline{p}$

$$\underline{L} = \underline{r}\times\underline{p}$$

(2) Drehmoment: $\underline{a} = \underline{F}$

$$\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F}\,, \quad \underline{M} = 0 \text{ für } \underline{r}\parallel\underline{F}$$

$\longrightarrow$ Mechanik