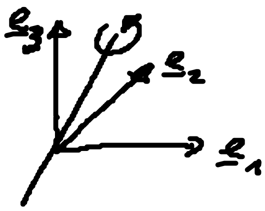
2.3 Drehungen / Spiegelungen

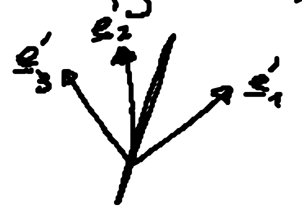
- Problemstellung:
  (1) Beschreibe Drehung / Spiegelung von $\underline{a} \in V$
  (2) Darstellung von $\underline{a}$ bzgl. neuer Basis

- Anwendung:
  (1) Basiswechsel
  (2) starrer Körper
  (3) Computergraphik
  (4) Symmetriebetrachtungen
  (5) Eugene Paul Wigner

- Orthonormalbasis (ONB):

$$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{\text{Drehung um bel. Achse}} \{\underline{e}_1' = \underbrace{R\underline{e}_1}_{\text{gedrehte } \underline{e}_1}, \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$$





$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j \quad \text{mit } D_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j = \cos\sphericalangle(\underline{e}_i', \underline{e}_j)} \quad (2.32)$$

- Eigenschaften der „Drehmatrizen" $\underline{\underline{D}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

  Winkel- und Normerhaltend („Isometrie")

  insbes.: $\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j' = \delta_{ij} \overset{(2.32)}{=} (D_{ik}\underline{e}_k) \cdot (D_{jl}\underline{e}_l) = D_{ik}D_{jl}\underbrace{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_l}_{\delta_{kl}}$

$$\xrightarrow{} \quad \xrightarrow{D_{jk} = D^t_{kj}} \quad \xrightarrow{(2.27)} \quad \boxed{\begin{aligned} D_{ik}D_{jk} &= \delta_{ij} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{D}}^{-1} \end{aligned}} \quad (2.33)$$

… orthogonale Matrix $\in O(3)$

(nichtkommutative Gruppe aller Drehungen & Spiegelungen)

Bem: $\underline{\underline{D}}^{-1}$ ... macht Drehung $\underline{\underline{D}}$ rückgängig = zu $\underline{\underline{D}}$ inverses Element

- „Konstruktion":

$$(2.32) \longrightarrow \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} [\underline{e}_1'] = [\underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1, \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2, \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3] \\ [\underline{e}_2'] = \ldots \\ [\underline{e}_3'] = \ldots \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

- Problemlösung:

(1) Drehung / Spiegelung von $\underline{a}$:

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \longrightarrow R\underline{a} \overset{!}{=} a_i \underline{e}_i' \underset{(2.32)}{=} a_i D_{ij} \underline{e}_j$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} [R\underline{a}]_j &= a_i D_{ij} \\ &= D^t_{ji} a_i \end{aligned}} \quad \text{... in der ungedrehten Basis} \quad (2.35)$$

im $\mathbb{R}^n$: $\boxed{R\underline{a} = \underline{\underline{D}}^t \underline{a}}$

„aktiver Standpkt."

(2) $\underline{a}$ in neuer Basis: $\underline{a} = a_j \underline{e}_j \overset{!}{=} a_i' \underline{e}_i'$

$\longrightarrow$ Trafo. von Vektorkomp.

$$a_i' = \underline{e}_i' \cdot \underline{a} = \underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j}_{D_{ij}} a_j$$

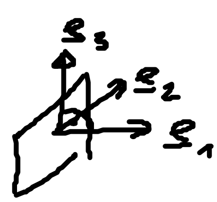
$$\longrightarrow \boxed{a_i' = D_{ij} a_j} \longrightarrow D^t_{ki} a_i' = \underbrace{D^t_{ki} D_{ij}}_{\delta_{kj}} a_j = a_k$$

$$\xrightarrow[i \to j]{k \to i} \boxed{a_i = D^t_{ij} a_j'} \quad (2.36)$$

„passiver" Standpkt.

mit $\underline{a}, \underline{a}' \in \mathbb{R}^3$: $\boxed{\begin{aligned} \underline{a}' &= \underline{\underline{D}}\,\underline{a} \\ \underline{a} &= \underline{\underline{D}}^t \underline{a}' \end{aligned}} \quad (2.37)$

- Bsp1: Spiegelung an Ebene $\perp \underline{e}_1$



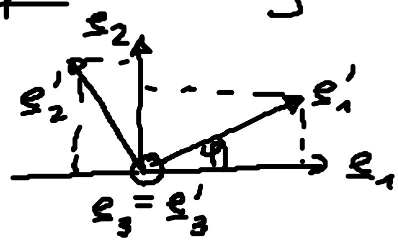
$$\longrightarrow \underline{e}_1' = -\underline{e}_1, \quad \underline{e}_2' = \underline{e}_2, \quad \underline{e}_3' = \underline{e}_3$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.38)$$

Bsp. 2: „Raumspiegelung" = Pkt. spiegelung am „Ursprung"

$$\longrightarrow \quad \underline{e}_i' = -\underline{e}_i \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

Bsp 3: Drehung um $\underline{e}_3$ (z-Achse):

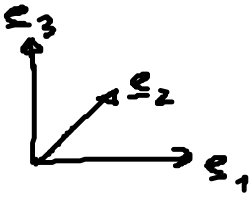


$$\underline{\underline{D}}(\underline{e}_3, \varphi) = \text{"}[\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j]\text{"} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.40)$$

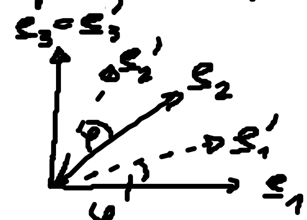
$\underline{e}_1'$ in $\{\underline{e}_i\}$

- Bsp 4: Eulersche Winkel (verschiedene Konventionen)

$\longrightarrow$ allg. Orientierung von $\{\underline{e}_i' = R\,\underline{e}_i\}$
(starrer Körper, Computergraphik)



$\xrightarrow[\ ]{\text{Rotation um } \underline{e}_3 \text{ um } \varphi}$



$$\xrightarrow[\text{um } \vartheta]{\text{um } \underline{e}_2'} \underline{e}_1'', \underline{e}_2'', \underline{e}_3''$$

$$\xrightarrow[\text{um } \psi]{\text{um } \underline{e}_3''} \underline{e}_1''', \underline{e}_2''', \underline{e}_3''': \quad \boxed{\underline{\underline{D}}(\varphi, \vartheta, \psi) = \underbrace{\underline{\underline{D}}(\underline{e}_3'', \psi)}_{\text{in } \{\underline{e}_i''\}} \underbrace{\underline{\underline{D}}(\underline{e}_2', \vartheta)}_{\text{in } \{\underline{e}_i'\}} \underline{\underline{D}}(\underline{e}_3, \varphi)} \qquad (2.41)$$

Applet: Webseite ITP $\rightarrow$ Lehre $\rightarrow$ elearning $\rightarrow$ Eulerwinkel

$\longrightarrow$ allg. Drehung / Spiegelung: 3 Winkel (s. Übungen)

- Händigkeit:

(i) Drehungen: Rechtssystem $\rightarrow$ Rechtssystem:

$$\text{Spatprodukt: } \underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = 1 = \begin{vmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \ldots & \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \ldots & \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{1 = |\underline{\underline{D}}| = \det(\underline{\underline{D}})} \qquad (2.42)$$

Determinante von $\underline{\underline{D}}$

$\longrightarrow$ $\underline{\underline{D}} \in SO(3)$ ... eigentlich orthogonale Matrizen (nur Rotationen)

(ii) Spiegelung: Rechtssystem $\rightarrow$ Linkssystem

$$\boxed{\underline{e}_3' \cdot (\underline{e}_1' \times \underline{e}_2') = -1 = |\underline{\underline{D}}|} \quad (2.43)$$

- $\underline{\underline{D}} \in O(3)$ ... Punktoperationen wichtig zur Klassifizierung von Kristallen (kubisch, hexagonale, ... Kristalle)

2.4 Abstrakte Definition eines Vektorraumes

- Grund: (i) „Rechenregeln" für Vektoren
  (ii) "Erweiterung des Vektorbegriffs
- Def: s. Materialien
- Bsp: (i) Vektoren für Physiker ($\rightarrow$ Kap. 2.1)
  (ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ... „n-Tupel", $a_i \in \mathbb{R}$
  Zeilenvektor

$$\left.\begin{aligned} &\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{... Spaltenvektor} \\ &\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &p\underline{a} = (pa_1, \dots, pa_n), \quad p \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} (2.45)$$

$\longrightarrow$ Darstellung von Vektoren bzgl. Basis ($\rightarrow$ Kap 2.1.1)

(iii) $n \times m$ - Matrizen $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($\rightarrow$ Kap. 2.2)

$$\left.\begin{aligned} [\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}]_{ij} &:= A_{ij} + B_{ij} \\ [p\underline{\underline{A}}]_{ij} &:= pA_{ij} \end{aligned}\right\} (2.21)$$

(iv) entsprechend: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{n \times m}$

(v) Polynome n-ten Grades

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ äquivalent zu $(n+1)$-Tupel $\in \mathbb{R}^{n+1}$

$\longrightarrow$ Taylorentwicklung

$\longrightarrow$ Legendrepolynome ($\rightarrow$ Übungen)

2.5 Lineare Unabhängigkeit, Entwicklungssatz

- **Def.:** Vektoren $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ heißen linear unabhängig, falls $p_1 \underline{a}_1 + \dots + p_n \underline{a}_n = 0$ nur für $p_1 = p_2 = \dots p_n = 0$ erfüllt ist, andernfalls heißen sie linear abhängig (2.46)

- **Def.:** Die maximale Zahl n linear unabhängiger Vektoren im Vektorraum V heißt eine Basis in V. n heißt Dimension von V (2.47)

- Entwicklungssatz: $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ ... Basis in V

  $\longrightarrow$ eindeutige Entwicklung: $\underline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{e}_i$ (2.48)

- Bsp: (i) Vektoren für Physiker ($\longrightarrow$ Kap. 2.1.1)

  (ii) $\mathbb{R}^n$, $\underline{e}_1 = (1, 0 \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, \dots 0)$, ... $\underline{e}_n = (0, 0, \dots 1)$

  (iii) $\mathbb{R}^{n \times m}$, klar!

  (iv) Polynome: $\underline{e}_0 = 1$, $\underline{e}_1 = x$, $\underline{e}_2 = x^2$, ...