2.6 Euklidischer Vektorraum

- Warum? „Länge von / Winkel zwischen Vektoren"
  Messen!

- **Def:** Ein euklidischer Vektorraum besteht aus einem reellen V und einem Skalarprodukt = inneres Produkt $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(A1)} & \underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a} \quad \text{.. Symmetrie} \\ \text{(A2)} & \underline{a}\cdot\underline{a} \geq 0 \\ \text{(A3)} & \underline{a}\cdot\underline{a} = 0 \Longleftrightarrow \underline{a} = \underline{0} \\ \text{(A4)} & (p\underline{a})\cdot\underline{b} = p(\underline{a}\cdot\underline{b}), \quad p\in\mathbb{R} \\ \text{(A5)} & (\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{c} + \underline{b}\cdot\underline{c} \end{array}} \quad (2.48)$$

(A2), (A3) ... positive Definitheit; (A4), (A5) Linearität

Sprechweise: "$\cdot$" ist symmetrische (A1)
positiv-definite (A2/3)
bilineare (A1/4/5)
Abbildung: $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

- Messen!
  (i) Länge, Betrag, Norm von $\underline{a}$: $\quad a = |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}$ (2.49)
  (ii) $\underline{a}$ "steht senkrecht auf" $= \perp$ $\underline{b}$, falls $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0$ (2.50)

- Basis $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ in V ist **Orthonormal-Basis**, wenn

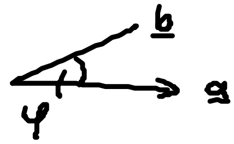
$$\boxed{\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \quad \text{... normiert, Einheitsvekt.} \\ 0, & i\neq j \quad \text{.. orthogonal} \end{cases}} \quad (2.51)$$

Kronecker-Symbol $(i,j = 1, \dots, n)$

<u>Bem:</u> Erzeugung von Orthonormal-Basis aus beliebiger Basis $\longrightarrow$ Gram-Schmidtsches Orthonormierungsverfahren $\rightarrow$ Übungen

- Bsp 1: Vektoren für Physiker ($\rightarrow$ Kap. 2.1)

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\varphi$$



Bsp: 2: $\mathbb{R}^n$: $\quad \underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \quad (2.52) \quad (\rightarrow$ Kap. 2.1.1)

Bsp 3: $\mathbb{R}^{n \times m}$: $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij} B_{ij} \quad (2.53)$

$$\overset{(2.23)}{=} Sp(\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{B}}^{t})$$

Bsp 4: Polynome: $p_1(x)$, $p_2(x)$

$$p_1 \cdot p_2 = (p_1, p_2) = \int_{-1}^{1} p_1(x)\, p_2(x)\, dx \quad (2.54)$$

„kontinuierlicher Index"

2.7 <u>Erweiterungen</u>

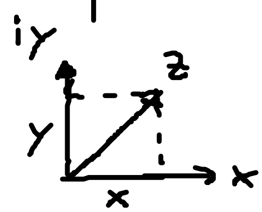
- „Erinnerung": $\mathbb{C}$ ... komplexe Zahlen

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ mit } i = \sqrt{-1} \longrightarrow i^2 = -1 \quad (2.55)$$

$x \in \mathbb{R}$ ... Realteil \
$y \in \mathbb{R}$ ... Imaginärteil $\Big\}$ von z

$z^* = x - iy$ ... konjugiert komplex zu z

$|z|^2 = z z^* = x^2 + y^2$ ... Betrag von z



- für Vektorraum V über $\mathbb{C}$: Verallgemeinerung

<u>Def:</u> Unitärer Vektorraum = komplexer V & (hermitesches) Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b} \in \mathbb{C}$ mit

(A1') $\quad \underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{b} \cdot \underline{a})^*$ ... hermitesch $\quad (2.56)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(A2)} & \underline{a}\cdot\underline{a} \geq 0 \\ \text{(A3)} & \underline{a}\cdot\underline{a} = 0 \Longleftrightarrow \underline{a} = \underline{0} \end{array}\Bigg\}\ \text{wie in (2.48)} \\ \begin{array}{ll} \text{(A4')} & (p\underline{a})\cdot\underline{b} = p^*(\underline{a}\cdot\underline{b}),\ p \in \mathbb{C} \\ \text{(A5)} & (\underline{a}+\underline{b})\cdot\underline{c} = \underline{a}\cdot\underline{c} + \underline{b}\cdot\underline{c} \quad \text{wie in (2.48)} \end{array}\Bigg\}\ \begin{array}{l}\text{semilinear} \\ \text{im 1. Argument}\end{array}}$$

insbesondere: $\boxed{\underbrace{\underline{a}\cdot p\underline{b}} = p(\underline{a}\cdot\underline{b})}$ ... linear im 2. Argument (2.57)

$$\stackrel{(A1')}{=} (p\underline{b}\cdot\underline{a})^* \stackrel{(A4')}{=} [p^*(\underline{b}\cdot\underline{a})]^* = p(\underline{b}\cdot\underline{a})^* \stackrel{(A1')}{=} p(\underline{a}\cdot\underline{b}) \text{ gel}$$

- Sprechweise:

  "·" ist hermitesche (A1')
  positiv-definite (A2/3)
  sesquilineare (A1', A4', A5)
  Abbildung: $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$

- Schreibweise:

$$\underbrace{\underline{a}\cdot\underline{b} = (\underline{a}, \underline{b})}_{\text{Vektoren}} = \langle \underline{a} | \underline{b} \rangle \qquad (2.57)$$

Funktionen, QM: Bra{}ket

- Bsp: $\mathbb{C}^n$: $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1^* b_1 + \ldots + a_n^* b_n$ (2.58)

- **Def:** Prähilbertraum P = V mit hermiteschem Skalarprodukt (2.59)

  $P \nearrow$ V über $\mathbb{R}$: euklidischer V

  $P \searrow$ V über $\mathbb{C}$: unitärer V

- **Def:** $\boxed{\text{Hilbertraum } H = \text{vollständiger Prähilbertraum } P}$

  → alle Grenzwerte von Cauchy-Folgen $\in P$

Bsp: rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: nicht vollständig
reelle " $\mathbb{R}$: vollständig

$$\left.\begin{array}{l} \pi \approx 3 \\ \ \ \approx 3.1 \\ \ \ \approx 3.14 \\ \ \ \ \vdots \end{array}\right\} \in \mathbb{Q}$$

aber: $\pi \notin \mathbb{Q}$!

- Anwendung: in QM: Hilbertraum „gutartiger" Funktionen

Bsp: Legendre Polynome $P_\ell(x)$, $|x| \leq 1$

$\{1, x, x^2, \ldots\}$ … Basis im Raum der Polynome/Funktionen auf $[-1,1]$

$\xrightarrow[\text{galisieren}]{\text{Ortho-}} P_\ell(x)$ [s. Übungen]

NB: $|x| = |\cos\vartheta| \leq 1 \longrightarrow$ QM

3. Lineare Gleichungssysteme & Determinanten

(Details: s. HM)

- Geg: Koeffizientenmatrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und
  Spaltenvektor $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

  Ges: Spaltenvektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$, so daß

  $$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

  $$A_{ij} x_j = b_i$$

  $\underline{b} = 0$ … homogenes Gleichungssystem

  $\underline{b} \neq 0$ … inhomogenes "

(3.1)

- Anwendungen: (i) Eigenvektoren von Matrizen/Tensoren [s. Kap. 4]
  (ii) elektr. Netzwerke

- Fragen: (i) existiert Lösung $\underline{x}$?
  (ii) ist $\underline{x}$ eindeutig?

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$

$\longrightarrow x_1, x_2$ existiert nicht

Grund: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständige Basis im $\mathbb{R}^3$

- Beschränkung auf $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$!

$$\boxed{\text{formale Lsg. von (3.1):} \quad \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\,\underline{b}} \qquad (3.2)$$

Spezialfälle:

(i) $n=2$: $$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad (3.3)$$

für bel. $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ nur lösbar, falls $\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$ linear unabh. (l.u.)

Def.: Determinante von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\boxed{\det \underline{\underline{A}} = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \qquad (3.4)$$

Warum: $$(3.3) \xrightarrow{\text{o.B.}} \begin{aligned} \det \underline{\underline{A}}\; x_1 &= b_1 A_{22} - b_2 A_{12} \\ \det \underline{\underline{A}}\; x_2 &= b_2 A_{11} - b_1 A_{21} \end{aligned}$$

also: $\underline{b} = 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eindeutig, nur falls $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

$\underline{b} \neq 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert eindeutig, nur " "

(ii) $n=3$: $$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{13} \\ \vdots & & \\ A_{31} & \cdots & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

$$\xrightarrow{\text{o.B.}} \quad \det \underline{\underline{A}}\; x_i = c_i\,(b_k\,A_{lm})$$

Def.: Determinante von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\det \underline{\underline{A}} := \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$= \varepsilon_{ijk}\, A_{1i}\, A_{2j}\, A_{3k}$ Spatprodukt der Zeilenvektoren [s. (2.19)]

$= \varepsilon_{ijk}\, A_{i1}\, A_{j2}\, A_{k3}$ Spaltenvektoren! (3.6)

$= \_\_ + \_\_ + \_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_$

... Sarrussche Regel

also: $\boxed{\begin{array}{l} \det \underline{\underline{A}} \neq 0 \longrightarrow \text{Spalten-/Zeilenvekt. l.u.} \\ \longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ existiert} \\ \xrightarrow{(3.5)} \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b} \text{ eindeutig} \\ \underline{x} = 0 \text{ für } \underline{b} = 0 \end{array}}$ (3.7)

NB: Berechnung von $\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$: Cramersche Regel $\rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}$

(iii) allgemeines n: (3.7) gilt mit

$$\boxed{\begin{array}{l} \det \underline{\underline{A}} = \sum\limits_{\text{alle } p} v(p)\, A_{i_1 1} A_{i_2 2} \cdots A_{i_n n} \\ p = (i_1, i_2 \cdots i_n) \ \ldots \ \text{Permutation aus } (1\,2 \ldots n) \\ v(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } (1\,2 \ldots n) \text{ und grade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutation} \end{cases} \end{array}} \quad (3.8)$$

... „Verallgemeinerung" des Spatprodukts!

- Regeln für Determinanten: s. Kopie