Do. 30.6.: EW203

6.6 Rotation

• **Def.** Rotation eines Vektorfeldes $\underline{a}(\underline{r})$

$$\operatorname{rot} \underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{a}(\underline{r}) \qquad (6.49)$$

.... Wirbelfeld von $\underline{a}(\underline{r})$

• kartesische Koordinaten:

$$\underline{\nabla} \overset{(6.26)}{=} \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \underline{a}(\underline{r}) = a_i \underline{e}_i \qquad x_i,\ i = x,y,z$$

$$\longrightarrow \underline{\nabla} \times \underline{a}(\underline{r}) = \left(\underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \times \left(a_j(\underline{r})\, \underline{e}_j\right)$$

$$\text{mit} \quad \underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \underline{e}_k \qquad (2.10)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_j = 0\right] = \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(\underline{r})\ \varepsilon_{ijk}\, \underline{e}_k$$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ $\longrightarrow$

$i \to j$

$j \to k$

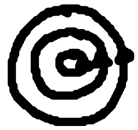
$k \to i$

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \underline{a}(\underline{r}) = \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} a_k\right) \underline{e}_i} \qquad (6.50)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[\underline{\nabla} \times \underline{a}(\underline{r})\right]_i &= \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} a_k\right) \\
\left[\underline{\nabla} \times \underline{a}\right]_x &= \frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y \\
\left[\underline{\nabla} \times \underline{a}\right]_y &= \frac{\partial}{\partial z} a_x - \frac{\partial}{\partial x} a_z \\
\left[\underline{\nabla} \times \underline{a}\right]_z &= \frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x
\end{aligned}\right\} \quad (6.51)$$

• **Deutung I:** $\operatorname{rot} \underline{a}(\underline{r}) = \underline{\nabla} \times \underline{a}(\underline{r})$ identifiziert lokal Wirbel von Vektorfeldern (6.52)

Bsp. 1: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ (6.53) [s. Kap. 6.2]



... Prototyp eines Wirbels in Geschw.feldern

$\underline{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\underline{v}$ ... Wirbelstärke (6.54)

Beweis: $\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{\nabla} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$

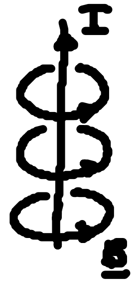
Hilfsformel: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$

& $\underline{\nabla}\ \underline{r}$

$$= \underline{\omega}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{r})}_{3} - \underbrace{(\underline{\omega}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{r}}_{\omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \underline{\omega}}$$

$$= 3\underline{\omega} - \underline{\omega} = 2\underline{\omega} \quad \text{qed.}$$

Bsp 2: Strom-Leiter:



$\mathrm{rot}\,\underline{B} \sim I$ (6.55)

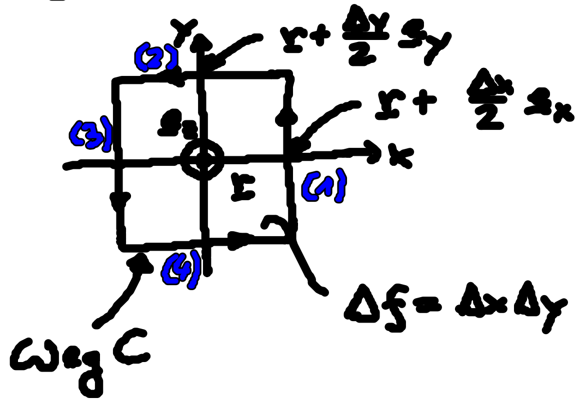
(Maxwell-Gl.!!!)

- Deutung II:

Ziel: Verdeutliche Maß für Wirbel von $\underline{a}(\underline{r})$ am Flächenelement $\Delta\underline{f}$

(i) Orientierte Fläche = Flächenelement $\Delta\underline{f}$ mit Normalenvektor $\hat{\underline{\nu}}$ ($|\hat{\underline{\nu}}| = 1$) $\longrightarrow$ $\Delta\underline{f} = \Delta f\,\hat{\underline{\nu}}$

hier: $\Delta f = \Delta x \, \Delta y$, $\hat{\underline{\nu}} = \underline{e}_z$



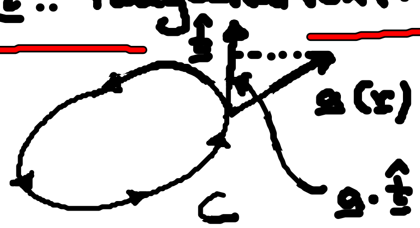
(ii) $\boxed{\text{Konvention: Wähle Weg } C \text{ um } \Delta f \text{ mit Rechte-Hand-Regel}}$

hier: $\hat{\underline{\nu}} = \underline{e}_z$, $C = (1) \to (2) \to (3) \to (4)$

(iii) Zirkulation/Wirbel:

Summiere Tangentialkomponente $\underline{a} \cdot \hat{\underline{t}}$ von $\underline{a}(\underline{r})$ entlang C

$\hat{\underline{t}}$ .. Tangentialvektor von C, orientiert wie C



$$\text{hier: } \Big[\underbrace{a_y\big(\underline{r} + \tfrac{\Delta x}{2} \underline{e}_x\big)}_{\underline{a} \cdot \underline{e}_y \ (1)} \underbrace{- a_y\big(\underline{r} - \tfrac{\Delta x}{2} \underline{e}_x\big)}_{\underline{a} \cdot (-\underline{e}_y) \ (3)}\Big] \Delta y$$

$$+ \Big[\underbrace{a_x\big(\underline{r} - \tfrac{\Delta y}{2} \underline{e}_y\big)}_{\underline{a} \cdot \underline{e}_x \ (4)} \underbrace{- a_x\big(\underline{r} + \tfrac{\Delta y}{2} \underline{e}_y\big)}_{\underline{a} \cdot (-\underline{e}_x) \ (2)}\Big] \Delta x$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \Big[\cancel{a_y(\underline{r})} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} a_y - \cancel{a_y(\underline{r})} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} a_y\Big] \Delta y$$

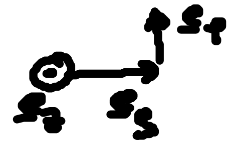
$$+ \Big[\cancel{a_x(\underline{r})} - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial}{\partial y} a_x - \cancel{a_x(\underline{r})} - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial}{\partial y} a_x\Big] \Delta x$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x\Big) \Delta x \Delta y = \underbrace{(\text{rot}\,\underline{a})_z}_{(\text{rot}\,\underline{a}) \cdot \underline{e}_z} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\Delta f}$$

beliebige Orientierung von $\Delta \underline{f}$

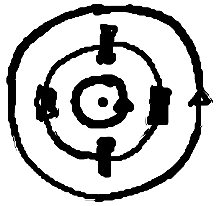
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Verwirbelung / Zirkulation um } \Delta\underline{f} \\ (\text{rot}\,\underline{a})\cdot\Delta\underline{f} = (\text{rot}\,\underline{a})\cdot\underline{\hat{n}}\,\Delta f\end{array}} \quad (6.57)$$

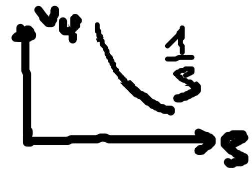
Bsp 2: $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{g_0}{\rho}\,\underline{e}_z \times \underline{e}_\rho = \frac{g_0}{\rho}\,\underline{\hat{e}}_\varphi$ (6.58)



o.B. $\text{rot}\,\underline{v} = 0$, $\underline{r} \neq 0$

Deutung:





- Zylinder-/Kugelkoord.: $\text{rot}\,\underline{a}$ berechenbar!
- Regeln:
$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \underline{\nabla}\times(\underline{a}+\underline{b}) = \underline{\nabla}\times\underline{a} + \underline{\nabla}\times\underline{b} \\ (2)\ \underline{\nabla}\times[f(\underline{r})\,\underline{a}] = f(\underline{r})\,\underline{\nabla}\times\underline{a} + [\underline{\nabla} f(\underline{r})]\times\underline{a}\end{array}\right\} \quad (6.59)$$

Beweis: in kartesischen Koord.

- <u>wichtige Anwendungen</u>: Details s. Kursvorlesungen

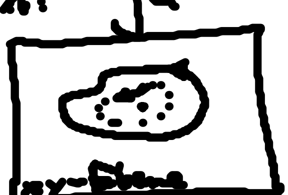
(1) Gradientenfelder sind wirbelfrei:

Satz:

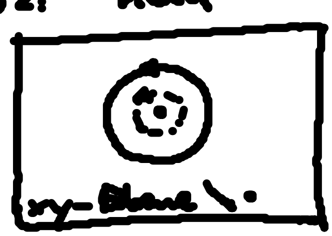
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Geg. } U(\underline{r}) \ldots \text{ Skalarfeld (2mal stetig diff.bar)} \\ \qquad \underline{a}(\underline{r}) \ldots \text{ Vektorfeld} \\ \qquad \text{im einfach zusammenhängenden Gebiet} \\ \text{dann: } \underline{a} = \text{grad}\,U \longleftrightarrow \text{rot}\,\underline{a} = 0\end{array}} \quad (6.60)$$

(i) einfach zusammenhängend:
alle geschlossenen Kurven lassen sich auf Pkt. zusammenziehen

Bsp 1: ja



Bsp 2: nein



(ii) Beweis: $\longrightarrow$

$$[\underline{\nabla}\times(\underline{\nabla}U)]_x = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}}\Big)U(\underline{r}) = 0$$

$$[\ldots]_y = [\quad]_z = 0$$

$\longleftarrow$: hier nicht!

(iii) Mechanik: $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U$!!

(iv) Ausnahme: $U \sim \ln \varrho \longrightarrow \underline{a} \sim \frac{1}{\varrho}\underline{e}_\varrho$ mit $\operatorname{rot}\underline{a} = 0$

Vorsicht: nicht einfach zusammenhängend wegen $\varrho = 0$

(2) Satz: $\boxed{\operatorname{div}\underline{B} = 0 \longleftrightarrow \underline{B} = \operatorname{rot}\underline{A}}$ (6.51)

E.-dynamik! Wirbelfelder sind quellenfrei!

(3) Laplace-Operator: $\boxed{\underline{\nabla}^2 = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \Delta}$ (6.52)

Bsp: Quellen eines Grad. feldes: $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U) = \underline{\nabla}^2 U$

(i) Potentialtheorie (E.-dynamik, Mechanik)

(ii) QM

kartes. Koord.: $\boxed{\underline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$ (6.53)

(4) Hauptsatz der Vektoranalysis:

„Quellen & Wirbel bestimmen $\underline{a}(\underline{r})$ eindeutig"

$$\underline{a}(\underline{r}) = \underbrace{\underline{a}_t(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div}\underline{a}_t = 0\\ \text{Wirbel}\\ \operatorname{rot}\underline{a} = \operatorname{rot}\underline{a}_t}} + \underbrace{\underline{a}_L(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{rot}\underline{a}_L = 0\\ \text{Quellen}\\ \operatorname{div}\underline{a} = \operatorname{div}\underline{a}_L}} + \underbrace{\underline{a}_R(\underline{r})}_{\substack{\operatorname{div}\underline{a}_R = \operatorname{rot}\underline{a}_R = 0\\ \text{für Randbed.}}} \tag{6.54}$$

7. Integration von Feldern

- verschiedene Typen: Linien- / Flächen- / Volumenintegrale
  (1D) (2D) (3D)

- HM: genaue Def. / Berechnung

- hier: (1) anschauliche Definition
  (2) Auswahl von Integralen
  (3) physikal. Einsichten (oft) ohne Rechnung
  (4) Satz von Stokes & Gauß