

## 7.3 Satz von Stokes

• Satz:

Für Fluß von  $\text{rot } \underline{a}$  durch Fläche  $F$  gilt:

$$\int_F \text{rot } \underline{a} \cdot d\underline{f} = \oint_{C=\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{r}$$

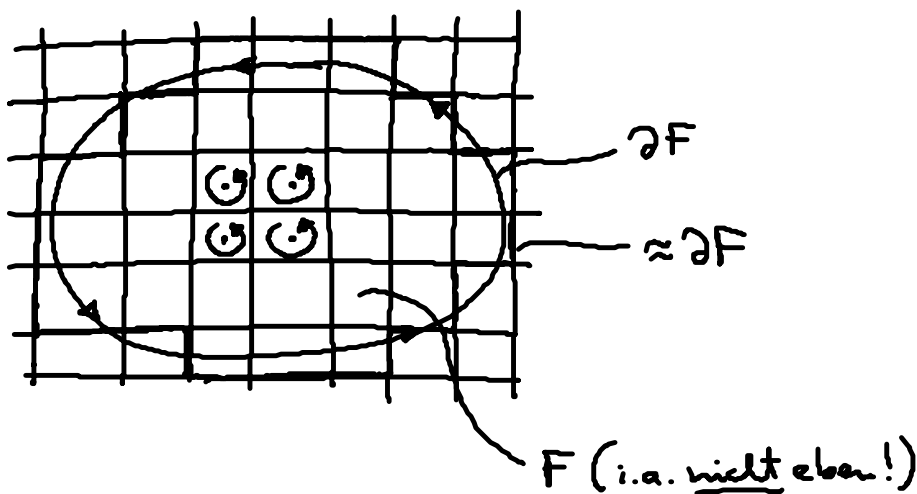
... Zirkulation von  $\underline{a}$  entlang  
Randkurve  $\partial F$  von  $F$

(7.21)

wichtig: (1)  $\text{rot } \underline{a}$  definiert auf ganz  $F$   
(2) Umlaufsinn von  $C=\partial F$  über  
Rechte-Hand-Regel für  $d\underline{f}$  von  $F$

• Beweis:

1. Nähere  $F$  durch „viele“ gleich orientierte Rechtecke  $i$ :



$$2. \int_F \text{rot } \underline{a} \cdot d\underline{f} \approx \sum_i \text{rot } \underline{a}(\underline{r}_i) \cdot \Delta \underline{f}^{(i)}$$

### 3. Kap. 6.6. Deutung II

$$\text{rot } \underline{a}(\underline{r}_i) \cdot \Delta f^{(i)} = \underbrace{\oint_{\odot} \underline{a} \cdot d\underline{r}^{(i)}}_{\text{Zirkulation um Rechteck } i}$$

4. benachbarte Flächenelemente  $i$  &  $j$ :



$$d\underline{r}^{(i)} = -d\underline{r}^{(j)} \rightarrow \underline{a} \cdot d\underline{r}^{(i)} + \underline{a} \cdot \underbrace{d\underline{r}^{(j)}}_{-d\underline{r}^{(i)}} = 0$$

$$\text{also: in } \sum_i \text{rot } \underline{a} \cdot \Delta f^{(i)} = \sum_i \underbrace{\oint_{\odot} \underline{a} \cdot d\underline{r}^{(i)}}_{\text{frei liegende Kurventeile der } \odot \text{ tragen bei}}$$

nur „frei liegende“ Kurventeile der  $\odot$  tragen bei

$$\rightarrow \underline{\text{Rand } C = \partial F}$$

$$\rightarrow \sum_i \underbrace{\oint_{\odot} \underline{a} \cdot d\underline{r}^{(i)}}_{\text{frei liegende Kurventeile der } \odot \text{ tragen bei}} \rightarrow \oint_{\partial F} \underline{a} \cdot d\underline{r} \quad \text{qed}$$

### - Anwendung:

(1)  $\underline{F} = -\text{grad } U$  ... Kraftfeld

a) beliebiger Weg:  $\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = - \int_C \underbrace{\text{grad } U \cdot d\underline{r}}_{= dU} \quad (6.21)$



$$= - \int_C dU = - U(\underline{r}) \Big|_{\underline{r}_a}^{\underline{r}_e} = - [U(\underline{r}_e) - U(\underline{r}_a)]$$

b) geschlossener Weg:

$$\underline{r}_a = \underline{r}_e \rightarrow \oint_{C = \partial F} \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0! \quad (7.22)$$

c)  $\text{rot } \underline{F} = -\text{rot grad } U = 0 \quad (6.60)$

$$\rightarrow \int_F \text{rot } \underline{F} \cdot d\underline{f} = 0 \xrightarrow[\text{(7.23)}]{\text{mit (7.22)}} \text{Stokes o.k.}$$

(2) Achtung:  $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{g_0}{s} \underline{e}_\varphi$  vgl. (6.58)

a)  $\text{rot } \underline{v} = 0, \quad \underline{r} \neq 0$

$\rightarrow \int_F \text{rot } \underline{v} \cdot d\underline{f}$  nicht berechenbar  
falls  $\underline{r} = z \underline{e}_z \in F!$

b)  $C = \partial F$ : Kreis um z-Achse  
mit  $g = \text{konst.}$



$$\int_{C=\partial F} \underline{v}(\underline{r}) \cdot \frac{d\underline{r}}{|\underline{e}_\varphi|} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{g_0}{|\underline{e}_\varphi|} \underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi g d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} g d\varphi \underline{e}_\varphi = g_0 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi g_0 \neq 0 !!$$

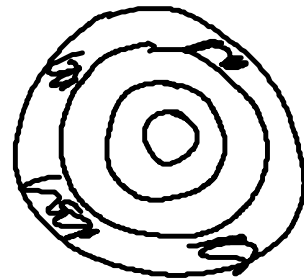
### 7.4 Volumenintegrale

• Motivation: Gesamtmasse  $M$  der Erde?

Schalenstruktur

(i) unterschiedliches Material

(ii) Inhomogenitäten in der Schale



$$\rightarrow M \approx \sum_i \underbrace{m(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Masse von} \\ \text{Vol. } \Delta V_i \text{ am} \\ \text{Ort } \underline{r}_i}} = \sum_i \underbrace{\rho(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Massendichte} \\ \text{Skalarfeld!}}} \Delta V_i$$

für genauere Berechnung  $\Delta V_i \rightarrow dV \rightarrow 0$

• Def:

Volumenintegral über Skalarfeld  $f(\underline{r})$  im  
Volumen  $V$

$$\int_V f(\underline{r}) dV \xleftarrow{\Delta V_i \rightarrow dV} \sum_{i \in V} f(\underline{r}_i) \Delta V_i$$

(7.24)

NB: (1)  $f(\underline{r})$  ... „Dichte“

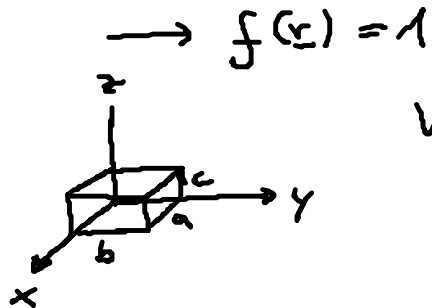
(2)  $f(\underline{r})$  ... (kartesische) Komp. eines Vektorfeldes

• kartesische Koordinaten:

$$\boxed{dV = dx dy dz} \quad (7.25)$$

... Volumen eines infinitesimal kleinen Quaders

Bsp: (1) Berechne Vol. eines Quaders mit Kantenlänge  $a, b, c$



$$V_Q = \int_{V_Q} dV = \int_{z=0}^c \int_{y=0}^b \int_{x=0}^a dx dy dz$$

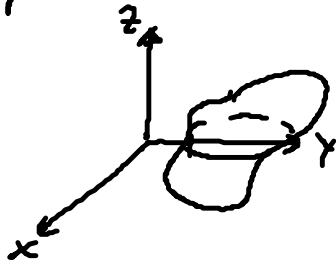
3-fach Integral!

„faktoriell hier“

$$\int_{z=0}^c dz \int_{y=0}^b dy \int_{x=0}^a dx = abc \checkmark$$

Produkt von 3  
1D Integralen

(2) komplizierter Rand  $\partial V$  von  $V \rightarrow HM$



• beliebige Koord.  $x_1, x_2, x_3$ :

(1) Koord. trafo:  $\underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x_1, x_2, x_3) \\ y(\dots) \\ z(\dots) \end{pmatrix} \quad (7.26)$

kartes.  
Koord.

(2) Welches Volumen gehört zu  $dx_1, dx_2, dx_3$

Bsp:  $dr, d\varphi, dz$  ... Einheit Länge! nicht Volumen  
 → Umfaktoren!!!

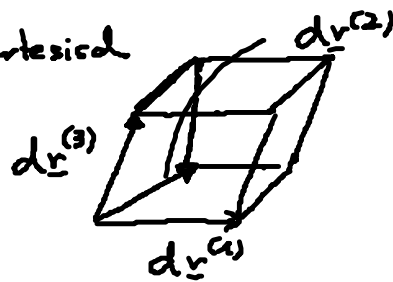
Verschiebungsvektor für  $dx_i$

$$d\underline{r}^{(i)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial x_i} dx_i \quad (7.27)$$

keine  
Summe  
über  $i$

$\sim \underline{e}_i$

$\underline{r}$  kartesisch



→ Spatprodukt!

$$dV = d\underline{r}^{(1)} \cdot (d\underline{r}^{(2)} \times d\underline{r}^{(3)})$$

$$\stackrel{(7.27)}{=} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \cdot \left( \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (7.28)$$

(3) Führe ein:

Jacobi-Matrix:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial x}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_3} \\ \frac{\partial z}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Spaltenvektoren

$\stackrel{(7.28)}{\rightarrow}$   
 mit (7.29)  
 & Spatprodukt  
 =  $\det \underline{\underline{F}}$  !!!

$$dV = \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \right| dx_1 dx_2 dx_3 \quad (7.30)$$

$$= \det \underline{\underline{F}} dx_1 dx_2 dx_3$$

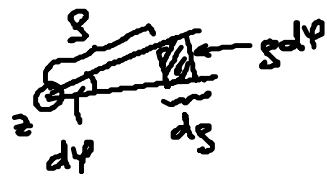
Funktionaldeterminante

Bsp: (1) Zylinderkoord:  $x_i = \rho, \varphi, z$

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

$$\rightarrow \det \underline{\underline{F}} = 1 \rho (\cos^2 \varphi - (-) \sin^2 \varphi) = \rho \quad (7.32)$$

$$\rightarrow \boxed{dV = \underbrace{\int ds d\varphi}_{\text{Grundfläche}} dz}_{\text{Höhe}} \quad (7.33)$$

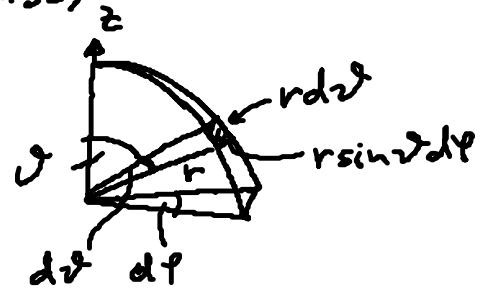


(2) Kugelkoord.:  $x_i = r, \vartheta, \varphi$

$$\rightarrow \det \underline{\underline{F}} \stackrel{\text{O.K.}}{=} r^2 \sin \vartheta \quad (7.34)$$

$$\rightarrow \boxed{dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi} \quad (7.35)$$

Grundfläche auf x Höhe  
Kugel schale  
[vgl. (7.19)]



• Bsp: Volumen  $V_K$  einer Kugel mit Radius  $R$ :

$\rightarrow$  Kugelkoord. mit  $f(r) = 1$  in (7.24)

$$V_K = \int_{V_K} dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

$$\underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr}_{\text{3-fach Integral}} = \underbrace{\left( \int_0^R r^2 dr \right)}_{\frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{R^3}{3}} \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right)}_{2\pi} \underbrace{\left( \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \right)}_{\int_1^{-1} d \cos \vartheta = 2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

## 7.5 Gaußsder Satz

• Satz:

Für Quellen von  $\underline{a}$  in  $V$  gilt:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{a} \, dV = \int_{\partial V} \underline{a} \cdot d\underline{f}$$

... Fluß durch Oberfläche  $\partial V$

(7.36)

wichtig: (1)  $\operatorname{div} \underline{a}$  definiert in ganz  $V$

(2)  $d\underline{f}$  zeigt aus  $V$  heraus