7.3 Satz von Stokes

• **Satz:** Für Fluß von $\operatorname{rot}\underline{g}$ durch Fläche F gilt:

$$\int_F \operatorname{rot}\underline{g}\cdot d\underline{f} = \oint_{C=\partial F} \underline{g}\cdot d\underline{r} \qquad (7.21)$$

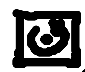
... Zirkulation von $\underline{g}$ entlang Randkurve ∂F von F

wichtig: (1) $\operatorname{rot}\underline{g}$ definiert auf ganz F

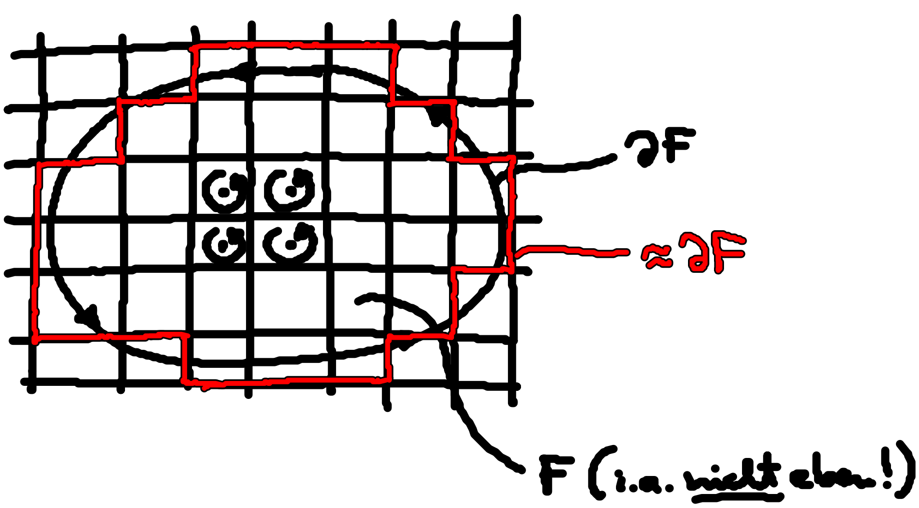
(2) Umlaufsinn von $C=\partial F$ über Rechte-Hand-Regel für $d\underline{f}$ von F

• **Beweis:**

1. Nähere F durch „viele" gleich orientierte Rechtecke i:



$\Delta\underline{f}^{(i)}$

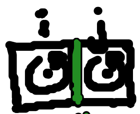


2. $\int_F \operatorname{rot}\underline{g}\cdot d\underline{f} \approx \sum_i \operatorname{rot}\underline{g}(\underline{r}_i)\cdot\Delta\underline{f}^{(i)}$

3. Kap. 6.6. Deutung II

$$\mathrm{rot}\,\underline{a}(\underline{r}_i)\cdot\Delta\underline{f}^{(i)} = \underbrace{,,\oint_{(i)} \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}\,``}_{\text{Zirkulation um Rechteck } i}$$

4. benachbarte Flächenelemente i & j:



$d\underline{r}^{(i)} = -d\underline{r}^{(j)}$ $\longrightarrow$ $\underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)} + \underline{a}\cdot\underbrace{d\underline{r}^{(j)}}_{-d\underline{r}^{(i)}} = 0$

also: in $\sum_i \mathrm{rot}\,\underline{a}\cdot\Delta\underline{f}^{(i)} = \sum_i ,,\oint_{(i)} \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}\,``$

nur „frei liegende" Kurventeile der (i) tragen bei

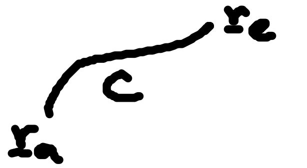
$\longrightarrow$ Rand $C = \partial F$

$$\longrightarrow \sum_i ,,\oint_{(i)} \underline{a}\cdot d\underline{r}^{(i)}\,`` \longrightarrow \oint_{\partial F} \underline{a}\cdot d\underline{r} \qquad \text{qed}$$

• Anwendung:

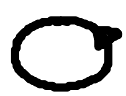
(1) $\underline{F} = -\mathrm{grad}\,U$ ... Kraftfeld

a) beliebiger Weg: $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = -\int_C \underbrace{\mathrm{grad}\,U\cdot d\underline{r}}_{=dU}$ (6.21)



$$= -\int_C dU = -U(r)\Big|_{r_a}^{r_e} = -[U(r_e) - U(r_a)]$$

b) geschlossener Weg:



$r_a = r_e \longrightarrow \oint_{C=\partial F} \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0!$ (7.22)

c) $\mathrm{rot}\,\underline{F} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,U = 0$ (6.60)

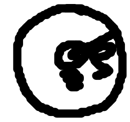
$\longrightarrow \int_F \mathrm{rot}\,\underline{F}\cdot d\underline{f} = \underset{(7.23)}{0} \xrightarrow[(7.22)]{\text{mit}}$ Stokes o.k.

(2) Achtung: $\underline{v}(\underline{r}) = \frac{g_0}{\varrho}\underline{e}_\varphi$ vgl. (6.58)

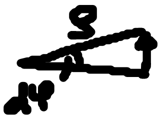
a) $\operatorname{rot} \underline{v} = 0\,, \quad \underline{r} \neq 0$

$$\longrightarrow \int_F \operatorname{rot} \underline{v} \cdot d\underline{f}$$ <u>nicht</u> berechenbar falls $\underline{r} = z\,\underline{e}_z \in F$!

b) $C = \partial F$: Kreis um z-Achse mit $z =$ konst.



$$\int_{C=\partial F} \underline{v}(\underline{r}) \cdot \underbrace{d\underline{r}}_{\varrho\, \underline{e}_\varphi\, d\varphi} = \int \frac{g_0}{\cancel{\varrho}}\, \underbrace{\underline{e}_\varphi \cdot \underline{e}_\varphi}_{1}\, \cancel{\varrho}\, d\varphi$$



$\varrho\, d\varphi\, \underline{e}_\varphi$

$$= g_0 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi g_0 \neq 0 \;!!$$

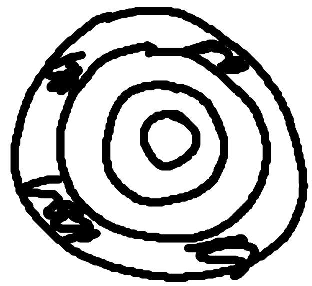
7.4 Volumenintegrale

• Motivation: Gesamtmasse M der Erde?

Schalenstruktur

(i) unterschiedliches Material

(ii) Inhomogenitäten in der Schale



$$\longrightarrow M \approx \sum_i \underbrace{m(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Masse von} \\ \text{Vol. } \Delta V_i \text{ am} \\ \text{Ort } \underline{r}_i}} = \sum_i \underbrace{\varrho(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Massendichte} \\ \text{Skalarfeld!}}} \Delta V_i$$

für genauere Berechnung $\Delta V_i \longrightarrow dV \to 0$

• <u>Def:</u>

Volumenintegral über Skalarfeld $f(\underline{r})$ im Volumen V

$$\int_V f(\underline{r})\, dV \xleftarrow{\Delta V_i \to dV} \sum_{i \in V} f(\underline{r}_i)\, \Delta V_i \qquad (7.24)$$

NB: (1) $f(\underline{r})$ … „Dichte"

(2) $f(\underline{r})$ … (kartesische) Komp. eines Vektorfeldes

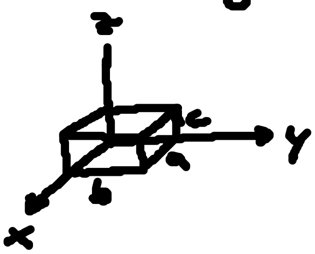
• kartesische Koordinaten:

$$\boxed{dV = dx\,dy\,dz} \qquad (7.25)$$

... Volumen eines infinitesimal kleinen Quaders

Bsp: (1) Berechne Vol. eines Quaders mit Kantenlänge a, b, c

$\longrightarrow f(\underline{r}) = 1$

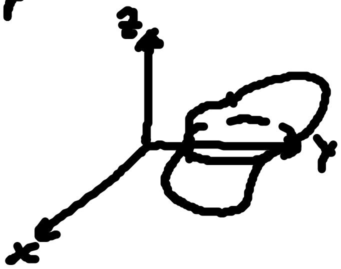


$$V_Q = \int_{V_Q} dV = \underbrace{\int_{z=0}^{c}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a} dx\,dy\,dz}_{\text{3-fach Integral!}}$$

„faktorisiert hier"

$$= \underbrace{\int_{z=0}^{c} dz \int_{y=0}^{b} dy \int_{x=0}^{a} dx}_{\text{Produkt von 3 1D Integralen}} = abc \checkmark$$

(2) komplizierter Rand ∂V von V $\longrightarrow$ HM



• beliebige Koord. x_1, x_2, x_3:

(1) Koord.trafo:
$$\underline{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{Kartes. Koord.}} = \begin{pmatrix} x(x_1, x_2, x_3) \\ y(\;\ldots\;) \\ z(\;\ldots\;) \end{pmatrix} \qquad (7.26)$$

(2) Welches Volumen gehört zu $dx_1\, dx_2\, dx_3$

Bsp: $dr\, d\vartheta\, d\varphi$ ... Einheit Länge! nicht Volumen

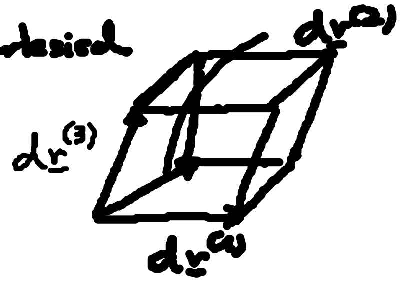
$\longrightarrow$ Vorfaktoren!!!

Verschiebungsvektor für dx_i:

$$d\underline{r}^{(i)} = \underbrace{\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}}_{\sim \underline{e}_i} dx_i = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial x_i}\, dx_i \qquad (7.27)$$

keine Summe über i

$\underline{r}$ kartesisch



$\longrightarrow$ Spatprodukt!

$$dV = d\underline{r}^{(1)} \cdot \left(d\underline{r}^{(2)} \times d\underline{r}^{(3)}\right)$$

$$\overset{(7.27)}{=} \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_2} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (7.28)$$

(3) Führe ein:

Jacobi-Matrix:

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (x_1,x_2,x_3)} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_1}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_2}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_3}\right)} \qquad (7.29)$$

Spaltenvektoren

$\xrightarrow{(7.28)}$ mit (7.29) & Spatprodukt $= \det \underline{\underline{F}}$!!!

$$\boxed{\begin{aligned} dV &= \left|\frac{\partial (x,y,z)}{\partial (x_1,x_2,x_3)}\right| dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &= \underbrace{\det \underline{\underline{F}}}_{\text{Funktionaldeterminante}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \end{aligned}} \qquad (7.30)$$

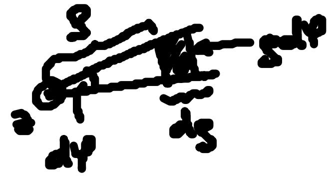
Bsp: (1) Zylinderkoord.: $x_i = \rho, \varphi, z$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.31)$$

$$\longrightarrow \det \underline{\underline{F}} = 1\, \rho \left(\cos^2\varphi - (-)\sin^2\varphi\right) = \rho \qquad (7.32)$$

$$\longrightarrow \boxed{dV = \underbrace{\varrho\, d\varrho\, d\varphi}\, \underbrace{dz}} \quad (7.33)$$

Grundfläche × Höhe

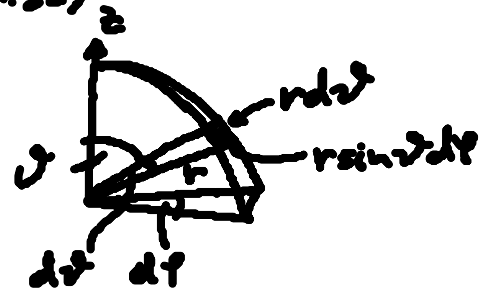


(2) Kugelkoord.: $x_i = r, \vartheta, \varphi$

$$\longrightarrow \det \underline{\underline{F}} \overset{\text{ÜB.}}{=} r^2 \sin\vartheta \quad (7.34)$$

$$\longrightarrow \boxed{dV = \underbrace{r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}\, dr} \quad (7.35)$$

Grundfläche auf Kugelschale [vgl. (7.19)] × Höhe



- Bsp: Volumen V_K einer Kugel mit Radius R:

$\longrightarrow$ Kugelkoord. mit $f(\underline{r}) = 1$ in (7.24)

$$V_K = \int_{V_K} dV = \underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr}_{\text{3-fach Integral}}$$

$$= \Big(\underbrace{\int_0^R r^2\, dr}_{\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3}}\Big) \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\Big) \Big(\underbrace{\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta}_{\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta = 2}\Big)$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

7.5 Gaußscher Satz

- **Satz:** $\boxed{\text{Für Quellen von } \underline{g} \text{ in } V \text{ gilt:}}$

$$\int_V \operatorname{div} \underline{g} \, dV = \int_{\partial V} \underline{g} \cdot d\underline{f} \qquad (7.36)$$

... Fluß durch Oberfläche ∂V

wichtig: (1) $\operatorname{div} \underline{g}$ definiert in ganz V

(2) $d\underline{f}$ zeigt aus V heraus