Wh: Ausgangspunkt:

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dt'\, h_i(\{x_i(t')\}, t') + \int_t^{t+\tau} \sum_{j=1}^{M} D_{ij}(\{x_i(t')\}, t') \cdot dW_j(t')$$

mit $W(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt'\, f(t')$

repräsentiert den Ort eines Brown'schen Teilchens im Grenzfall $t \gg \frac{1}{\gamma}$

$W(t)$ ist immer sehr irregulär!

$$\langle W(t) \rangle = 0$$

$$\langle (W(t))^2 \rangle = \Gamma t$$

$\rightarrow$ Die Schwankungen divergieren für $t \to \infty$

Zur integrierten Langevingleichung

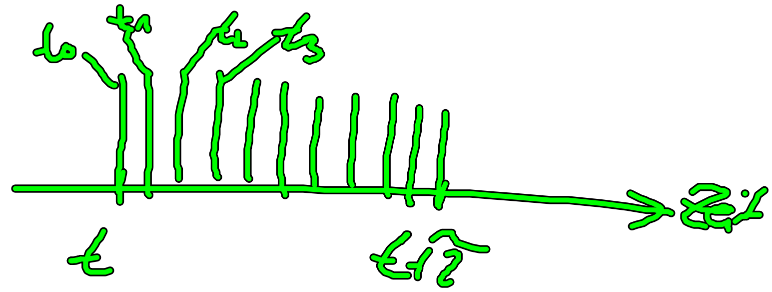
– 1. Term: $\int_t^{t+\tau} dt' \, h_i(\{x_i(t')\},t') \longrightarrow h_i(\{x_i(t)\},t)\cdot\tau$

– 2. Term: $A_{ij} = \int_t^{t+\tau} D_{ij}(\{x_i(t')\},t') \cdot dW_j(t')$

Strategie zur Auswertung von A_{ij}:

Zerlege das Integrationsintervall $[t, t+\tau]$ zunächst in N Teilintervalle

also



Approximiere A_{ij} durch die Summe der Beiträge der Teilintervalle

$$D_{ij}(\hat{t}_m)\left(W_j(t'_{m+1}) - W_j(t'_m)\right)$$

wobei $\hat{t}_m$ ein Zwischenwert im Intervall $[t_m, t_{m+1}]$

~~Ziel~~ Betrachte dann den Grenzwert $N \to \infty$ bei festem τ

d.h. die Teilintervalle werden unendlich klein.

Beachte: Für gewöhnliche Riemann-Integrale ist das Ergebnis dieses Grenzwertes <u>unabhängig</u> von der Wahl von $\hat{t}_m$!

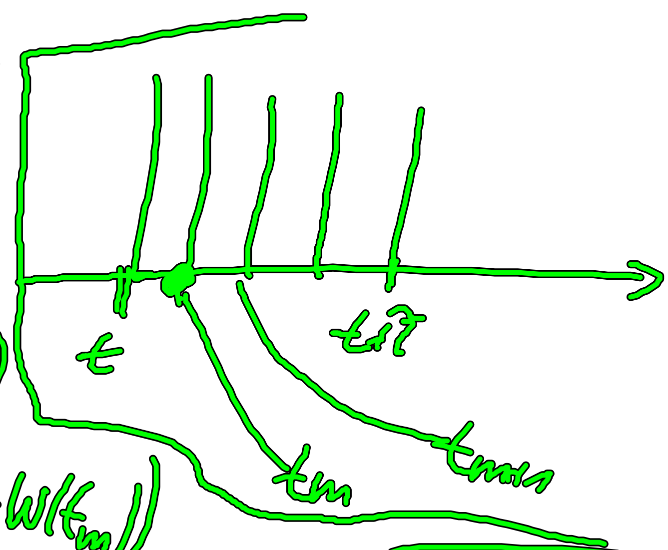
— nicht aber für stochastische Integrale!

Es gibt 2 Arten der Auswertung

Details: s. Buch von Gardiner „Stochastic Methods"

a) Definition nach Ito

Wir zeichnen in jedem Zeitintervall den linken Randpunkt aus



$$A_{ij}^{Ito} = A_{ij}^{I} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} D_{ij}(\{x(t_m)\}, t_m) \cdot \left(W(t_{m+1}) - W(t_m)\right)$$

$t_0 = t$

$t_N = t+\tau$

b) Definition nach Stratonovich

$$A_{ij}^{Stratonovich} = A_{ij}^{S} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \left[\left(\frac{1}{2} D_{ij}(\{x_i(t_{m+1})\}, t_{m+1}) + \frac{1}{2} D_{ij}(\{x_i(t_m)\}, t_m)\right)\left(W(t_{m+1}) - W(t_m)\right)\right]$$

bei der Stratonovitch-Integration wird also aus den beiden Beiträgen am oberen und unteren Rand ein Mittel wert gebildet!

<u>Bemerkungen</u>

- Für $D_{ij} = \text{const}$ (also für additives Rauschen) gilt offensichtlich

$$A^I_{ij} = A^S_{ij}$$

Dies war der Fall bei unserer früheren Diskussion der Brown'schen Bewegung: $\dot{\underline{v}} = -\gamma \underline{v} + \underline{f}$

$$\Leftrightarrow D_{ij} = \delta_{ij}$$

- Beispiel für das sich wirklich unterschiedliche Resultate ergeben.

betrachte der Einfachheit halber 1 Dimension

$$A = \int_0^{\tau} W(t')\, dW(t')$$

Auswertung nach Itô:

$$A^{I} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \Big(W(t_m) \left[W(t_{m+1}) - W(t_m) \right] \Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2} \Big[W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m) - W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m) + 2\, W(t_m) W(t_{m+1}) \Big]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2} \Big[W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m) - \left(\Delta W(t_m)\right)^2 \Big]$$

mit $\Delta W(t_m) = W(t_{m+1}) - W(t_m)$

$$A^{I} = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2} \left(W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m) \right)$$

$$- \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2} \left(\Delta W(t_m)\right)^2$$

Im 1. ~~Term~~ Summe auf der rechten Seite heben sich alle Terme weg bis auf $m=0$ und $m=N$!

beachte $t_{m=0} = 0$

$t_{m=N} = \tau$

$$\Rightarrow A^{I} = \frac{1}{2} W^2(\tau) - \frac{1}{2} W^2(0) - \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\Delta W(t_m)\right)^2$$

betrachte von letzten Term den Mittelwert

$$\left\langle \sum_{n=0}^{N} (\Delta W(t_n))^2 \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_n \left(W^2(t_{n+1}) + W^2(t_n) - 2W(t_{n+1})W(t_n) \right) \right\rangle$$

benutze unsere frühere Ergebnisse

$$\langle (W(t))^2 \rangle = \Gamma t$$

$$= \langle W(t+\tau) \cdot W(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \sum_{n=0}^{N} (\Delta W(t_n))^2 \right\rangle = \sum_{n=0}^{N} \left(\Gamma t_{n+1} + \Gamma t_n - 2\Gamma t_n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\left(\Gamma t_{n+1} - \Gamma t_n \right)}_{\Gamma \underbrace{(t_{n+1} - t_n)}_{\text{Breite eines Teilintervalls}}}$$

$$\Rightarrow \left\langle \sum_{n=0}^{N} (\Delta W(t_n))^2 \right\rangle = \Gamma \underbrace{\sum_{n=0}^{N} (t_{n+1} - t_n)}_{\text{das ist das ganze Integrationsintervall}}$$

$$= \Gamma \, ? \qquad |$$

Einsetzen:

$$A^I = \frac{1}{2} W^2(\tau) - \frac{1}{2} W^2(0) - \frac{1}{2}\Gamma\tau$$

Wir mitteln aus Konsistenzgründen auch über die ersten beiden Terme

$$\langle A^I \rangle = \frac{1}{2}\langle W^2(\tau)\rangle - \frac{1}{2}\langle W^2(0)\rangle - \frac{1}{2}\Gamma\tau$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma t - 0 - \frac{1}{2}\Gamma t = \underline{\underline{0}}$$

Num. Auswertung nach Stratonovitch

$$A^S = \lim_{N\to\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{2}(W(t_m) + W(t_{m+1}))(W(t_{m+1}) - W(t_m))$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N} \left(W^2(t_{m+1}) - W^2(t_m)\right)$$

es verschwinden alle Terme bis auf $m=0$ ($t_0 = 0$) und $m=N$ ($t_N = \tau$)

$$\Rightarrow A^S = \frac{1}{2}\left(W^2(\tau) - W^2(0)\right) \neq A^I$$

$$\langle A^S \rangle = \frac{1}{2}\Gamma \hat{\tau} + \langle A^I \rangle$$

Man sieht

- In diesem Beispiel erhält man wirklich unterschiedliche Ergebnisse!

- Die Stratonovitch-Integration ist näher an dem, was man von gewöhnl. (Riemann-)Integration kennt!

$$\int_0^{\hat{\tau}} u \, du = \left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\hat{\tau}}$$

I.8. Kramers-Moyal-Koeffizienten

→ Wichtig für den Zusammenhang zwischen (verallgemeinerten) Langevin-Gleichungen und den Fokker-Planck-Gleichungen für die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen!

Definition:

$$K^{(n)}(\{x_i(t)\}, t) = \frac{1}{n!} \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \underbrace{\left\langle \left(x_i(t+\tau) - x_i(t)\right)^n \right\rangle}_{\text{Mittelwert wird gebildet bei festen (scharfen) Werten } x_i(t)}$$

Kramers-Moyal-Koeffizient n-ter Ordnung

Ausgangspunkt:

Integrale Form der verallgemeinerten Langevin-Gleichung:

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dt' \Big[h_i(\{x_i(t')\}, t') + \underbrace{\sum_j D_{ij}(\{x_i(t')\}, t') \cdot f_j(t')}_{D_{ij}(\ldots)\cdot f_j \text{ Einstein'sche Summenkonvention}} \Big] \qquad (*)$$

$i = 1, \ldots, M$

Zentrale Idee:

Entwickle die Funktionen h_i und D_{ij} um den (scharfen) Wert $x_i(t)$

also:

$$h_i(\{x_i(t')\},t') = h_i(\{x_i(t)\},t') + \overbrace{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\{x_i(t)\},t')}^{h'_{ij}} \, (x_j(t')-x_j(t)) + \dots$$

$$D_{ij}(\{x_i(t')\},t') = D_{ij}(\{x_i(t)\},t) + \underbrace{\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{x_i(t)\},t')}_{D'_{ijk}} \cdot (x_k(t')-x_k(t)) + \dots$$

Wir setzen diese Entwicklung in ⊛ ein

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dt' \, h_i(\{x_i(t)\},t') + \int_t^{t+\tau} dt' \, h'_{ij} \cdot (x_j(t') - x_j(t)) + \dots$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ij}(\{x_i(t)\}, t') f_j(t')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk}(\{x_i(t)\}, t') \cdot (x_k(t') - x_k(t)) \cdot f_j(t') + \ldots$$

Iterieren ..... (d.h. wir setzen auf der rechten Seite wieder die verallgemeinerte Langevin-Gleichung ein.

$$x_i(t+\tau) - x_i(t)$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt' \, h_i(\{x_i(t)\}, t') + \int_t^{t+\tau} dt' \, h'_{ij} \int_t^{t'} dt'' \, h_j(\{x_j(t)\}, t'')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, h'_{ij} \int_t^{t'} dt'' \, D_{jk}(\{x_j(t)\}, t'') f_k(t'') + \ldots$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ij}(\{x_i(t)\}, t') f_j(t')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk} \int^{t'} dt'' \, h_k(\{x_k(t)\}, t'') \cdot f_j(t')$$

$$+ \int_{t}^{t+\hat{\tau}} dt' \, D_{ijk}' \int_{t}^{t'} dt'' \, D_{kl} \left(\mathrm{d}x_k(t''), t'' \right) f_j(t') f_l(t'')$$

$$+ \ldots\ldots$$