I.8. Kramers-Moyal-Koeffizienten

Wichtig für den Zusammenhang zw. (verallgemeinerten) Langevingleichungen (gewöhnl. DGL) und Fokker-Planck-Gleichungen für die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen (partielle DGL)

Definition

$$K^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\{x_i(t)\},t) = \frac{1}{n!}\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Big\langle (x_{i_1}(t+\tau)-x_{i_1}(t)) \cdot (x_{i_2}(t+\tau)-x_{i_2}(t)) \cdots (x_{i_n}(t+\tau)-x_{i_n}(t))\Big\rangle\Big|_{x_i(t)\text{ fest (scharfer Wert)}}$$

Ausgangspunkt: Integrale Form der verallgemeinerten Langevin-Gl.:

$$x_i(t+\tau)-x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dt' \Big[h_i(\{x_i(t')\},t') + \underbrace{\sum_j D_{ij}(\{x_i(t')\},t')\, f_j(t')}\Big] \quad (*)$$

schreibe nur D_{ij} (Einstein'sche Summenkonvention)

Zentrale Idee:
Entwickle die Funktionen h_i und D_{ij} um den scharfen Wert $x_i(t)$ $(i=1,\ldots,M)$

→

also:

$$h_i(\{x_i(t')\},t') = h_i(\{\overset{\text{fest}}{x_i(t)}\},t') + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\{\overset{\text{fest}}{x_i(t)}\},t')\cdot\left(x_j(t')-x_j(t)\right) + \ldots$$

$$D_{ij}(\{x_i(t')\},t') = D_{ij}(\{x_i(t)\},t') + \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{x_i(t)\},t')\cdot\left(x_k(t')-x_k(t)\right) + \ldots$$

Wir setzen diese Entwicklungen in ⊛ ein und ersetzen die Ausdrücke $x_j(t')-x_j(t)$ etc. im Integral wieder durch ⊛

$$\Rightarrow x_i(t+\tau)-x_i(t)$$
$$= \int_t^{t+\tau} h_i(\{x_i(t)\},t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} dt' \underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial x_j}}_{h_{ij}'}(\{x_i(t)\},t')\cdot(x_j(t')-x_j(t)) + \ldots$$
$$+ \int_t^{t+\tau} D_{ij}(\{x_i(t)\},t')\,f_j(t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} dt' \underbrace{\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}}_{D_{ijk}'}(\{x_i(t)\},t')\cdot\underbrace{(x_k(t')-x_k(t))}_{f_j(t')}$$

Iterieren ...

(Beachte dabei: [← Argument kommt später]
Jedes Zeitintegral ist proportional zu τ. Da wir am Ende am Limes $\tau\to 0$ interessiert sind, betrachten wir hier nur solche Terme, die höchstens Doppelintegrale über die Zeit enthalten)

$\Rightarrow x_i(t+\tau) - x_i(t)$

$$= \int_t^{t+\tau} dt' \, h_i(\{x_i(t)\}, t') + \int_t^{t+\tau} dt' \, h'_{ij}(t') \int_t^{t'} dt'' \, h_j(\{x_j(t)\}, t'')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, h'_{ij}(t') \int_t^{t'} dt'' \, D_{jk}(\{x_i(t)\}, t'') \, f_k(t'')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D_{ij}(\{x_i(t)\}, t') \, f_j(t') \qquad (**)$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk}(t') \int_t^{t'} dt'' \, h_k(\{x_k(t)\}, t'') \cdot f_j(t')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk}(t') \int_t^{t'} dt'' \, D_{kl}(\{x_k(t)\}, t'') \cdot f_j(t') \cdot f_l(t'')$$

$$+ \ldots$$

Betrachte nun den <u>ersten</u> Kramers–Moyal–Koeffizienten (n=1)

$$K_i^{(1)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \rangle$$

Benutze bei der Mittelung:

$$\langle f_i(t)\rangle = 0 \quad , \quad \langle f_i(t) f_j(t')\rangle = \Gamma\, \delta_{ij} \cdot \delta(t-t')$$

aus (**)

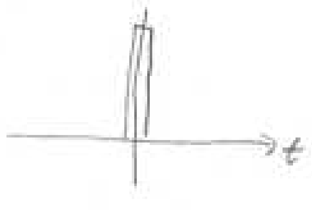
$$\Rightarrow \langle x_i(t+\tau) - x_i(t)\rangle$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt'\, h_i(\{x(t)\},t') + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt''\, h'_{ij}(t')\, h_j(\{x_j(t)\},t'')$$

$$+ \int_t^{t+\tau} dt'\, D'_{jk}(t') \int_t^{t'} dt''\, D_{kl}(\{x_k(t)\},t'')\, \underbrace{\langle f_j(t')\, f_l(t'')\rangle}_{\Gamma\, \delta_{jl}\, \delta(t'-t'')}$$

Auswertung des Terms mit der Deltafunktion
(Problem: Das Argument $\delta(t'-t'')$ enthält die obere Integrationsgrenze!)

Ansatz: $\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(t,\varepsilon)$ mit $f(t,\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Symmetrisch um den Ursprung!

$$\Rightarrow \int_t^{t'} dt''\, a(t'')\, \delta(t'-t'') = \frac{1}{\varepsilon} \int_{t'-\frac{\varepsilon}{2}}^{t'} dt''\, a(t'') \overset{\varepsilon\to 0}{=} \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\, a(t') = \frac{1}{2} a(t')$$

Die Deltafunktion trägt also nur halb zum Integral bei!

Achtung: Diese Argumentation mit der Delta-Funktion entspricht einer Stratonovich-Auswertung!

$$\Rightarrow \langle x_i(t+\tau) - x_i(t) \rangle$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt' \; h_i(\{x_i(t)\}, t') + \int_t^{t+\tau} dt' \int_t^{t'} dt'' \; h'_{ij}(t') \, h_j(\{x_j(t)\}, t'')$$

$$+ \frac{1}{2} \Gamma \int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk}(t') \, D_{kj}(\{x_k(t)\}, t')$$

beachte: - Der 2. Term enthält 2 Zeitintegrale mit deterministischen Integranden

$\rightarrow$ Beitrag $\sim \tau^2$

$\rightarrow$ verschwindet im Limes $\tau \to 0$!

- Die anderen Terme enthalten 1 Zeitintegral

$\rightarrow$ Beiträge $\sim \tau$

(beachte: Die Integranden sind ebenfalls deterministisch, da bei scharfem $\{x_i(t)\}$ ausgewertet wird!)

Denn: Für kleine τ können diese Terme approximiert werden durch

$$\int_t^{t+\tau} dt' h_i(\{x_i(t)\}, t') \approx \tau \, h_i(\{x_i(t)\}, t)$$

$$\int_t^{t+\tau} dt' \, D'_{ijk} D_{kj} \approx \tau \cdot \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{x_i(t)\}, t) \cdot D_{kj}(\{x_j(t)\}, t)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_i^{(1)}(\{x_i(t)\},t) = h_i(\{x_i(t)\},t) + \frac{1}{2}\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{x_i(t)\},t)\, D_{kj}(\{x_i(t)\},t))}$$

„Drift-Koeffizient"

Bemerkungen

– Der 2. Term in $K^{(1)}$ ist nur ungleich Null, wenn D_{ij} tatsächlich von $\{x_i(t)\}$ abhängt

— d.h. nur für multiplikatives Rauschen!

– Man nennt diesen 2. Term „rauschinduzierter Drift"

speziell:

– Einfache Langevin-Gl. für Brown'sches Teilchen (in 1 Dim)

$$\dot{v} = -\gamma v + f(t)$$

$$\Rightarrow h_i = -\gamma v \,, \quad D_{ij} = 1$$

$$\Rightarrow K^{(1)} = -\gamma v$$

, also kein rauschinduzierter Drift

– Geht man nochmal zurück zur Ausgangsgleichung (*), so sieht man: Der rauschinduzierte Drift resultiert aus der Tatsache, daß

$$\left\langle \int_t^{t+\tau} D_{ij}(\{x_i(t')\},t')\, f_j(t') \right\rangle \neq 0$$

— in der Stratonovich-Interpretation!

insbesondere der 2. Term

– Unser Ergebnis für $K^{(1)}$ entspricht dem Ergebnis der Stratonovitch-Regel; die Ito-Regel würde etwas anderes ergeben!

betrachte dazu nochmal entscheidenden Term in (**)
(vor der Mittelwertbildung)

$$\sim \int_t^{t+\tau} dt'\, D'_{ijk}(t') \int_t^{t'} D_{kl}(\{x_n(t)\}, t'')\cdot f_j(t') f_l(t'')\, dt''$$

$$= \int_t^{t+\tau} dt'\, D'_{ijk}(t')\, f_j(t') \int_t^{t'} D_{kl}(\{x_n(t)\}, t'')\, dW_l(t'')$$

$$= \int_t^{t+\tau} D'_{ijk}(t')\, dW_j(t') \underbrace{\int_t^{t'} D_{kl}(\{x_n(t)\}, t'')\, dW_l(t'')}_{E_{kl}(t')}$$

Im Ito-Kalkül gilt: (s. Buch von Gardiner)

$$< \int_{t_0}^{t} G(t')\, dW(t') > = 0$$

falls $G(t')$ statistisch unabhängig von $W(t'+\Delta t) - W(t')$ ist. Denn in jedem Teilintervall wird nach Ito ja am linken Rand ausgewertet!

$$= < \sum_m G_m (W_{m+1} - W_m) >$$

G stat. unabhängig

$$= \sum_m < G_m > < W_{m+1} - W_m >$$

$<dW> = 0$!

man sagt:

$G(t')$ ist hier eine „nicht-antizipierende" (vorwegnehmende) Funktion

speziell: $G(t') = W(t') \Rightarrow < \int W(t')\, dW(t') > = 0$ hatten wir bereits gezeigt !

in unserem Fall gilt: $E_{kl}(t')$ ist selbst nicht-antizipierend, da nur Zeiten $< t'$ involviert sind

$$\Rightarrow \left\langle \int_t^{t+\tau} \underbrace{D_{ijk}(t')\, E_{kl}(t')}_{\text{nicht-antizipierend}}\, dW_j(t') \right\rangle = 0 \,!$$

Bemerkung: Im Ito-Kalkül würde man auch Terme mit Delta-Fkt. anders auswerten

Damit

$$K^{(1)}_{i,Ito}(\{x_i(t)\},t) = h_i(\{x_i(t)\},t)$$

hier entfällt also der 2. Term aus dem multiplikativen Rauschen!

Wir legen uns aber nun auf die Stratonovitch-Interpretation fest.

$$K^{(1)}_i(\{x_i(t)\},t) = h_i(\{x_i(t)\},t) + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}(\{x_i(t)\},t)\, D_{kj}(\{x_i(t)\},t)}_{\text{rauschinduzierte Drift}}$$