

Wh: $\phi(\underline{r}, t)$ Ordnungsparameter

Modell A:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = - M \frac{\delta F}{\delta \phi} + \eta(\underline{r}, t)$$

↑
Mobilitäts-
Koeff.

mit $F[\phi] = \int d\underline{r} \left(\underbrace{f(\phi)}_{\text{Polynom in } \phi} + (\nabla \phi)^2 \right)$

Unterschied zu den
bisher betrachteten Modellen (DDF, Ginzburg-Landau-Theorie)
- keine Divergenz \rightarrow OP ist nicht erhalten

$\eta(\underline{r}, t)$: Zufallsstern

$$\langle \eta(\underline{r}, t) \eta(\underline{r}', t') \rangle = 2 k_B T M \delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t')$$

Zufallskraft und Mobilitätskoeff. sind gekoppelt! \rightarrow FTST!

Erklärung: Betrachte Modell A mit ortsunabhängigem OP

$$\frac{d\phi}{dt} = -M \frac{\partial F}{\partial \phi} + \eta(\epsilon)$$

Idee: Im Gleichgewicht soll das OP ϕ der (Forderung!) Wahrscheinlichkeit $P^g(\phi) \sim e^{-\beta F(\phi)}$

Ziel: Aufstellung der Fokker-Planck-Gleichung für $P(\phi)$

Kramers-Moyal-Koeff.:

$$K^{(1)} = -M \frac{\partial F}{\partial \phi}$$

(s. Kap I.9)

$$K^{(2)} = \frac{\Gamma}{Z}$$

wobei wir angenommen haben, daß $\langle \eta(\epsilon) \eta(\epsilon') \rangle = \Gamma \delta(\epsilon - \epsilon')$

FP-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\phi, t) &= \left(-\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\underbrace{-M \frac{\partial F}{\partial \phi}}_{K^{(1)}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \frac{\Gamma}{Z} \right) P(\phi, t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial \phi} J\phi \end{aligned}$$

$$\text{mit } J_\phi = -M \frac{\partial F}{\partial \phi} P(\phi, t) \\ - \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} P(\phi, t)$$

„Strom“

Gleichgewicht: $J_\phi = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} P^{\text{eq}}(\phi) = M \frac{\partial F}{\partial \phi} P^{\text{eq}}(\phi)$$

Lösung (s. Kap I, 12, Mikroreversibilität)

$$P^{\text{eq}}(\phi) = e^{\text{const} + \frac{2}{\pi} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi' \left(-M \frac{\partial F}{\partial \phi'} \right)}$$

$$\Rightarrow P^{\text{eq}}(\phi) \sim e^{-\frac{2M}{\pi} F(\phi)}$$

Wir hatten gefordert:

$$P^{\text{eq}}(\phi) \sim e^{-\beta F(\phi)}$$

mit $\beta = \frac{1}{k_B T}$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2M}{\pi}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\pi = 2M k_B T}$$

Anwendungen:

- Magnetohydrodynamik (siehe später)
- bestimmte chem. Reaktionen, Reaktions-Diffusions-Modelle

Modell B

Hier bleibt die OP erhalten!

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(\underline{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t)$$

$$\text{mit } \underline{j}(\underline{r}, t) = -M \nabla \frac{\delta F}{\delta \phi} + \underline{j}^*(\underline{r}, t)$$

Zufallsbeitrag

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(\underline{r}, t)}{\partial t} = M \nabla^2 \frac{\delta F}{\delta \phi} + \underline{j}(\underline{r}, t)$$

$$\text{mit } \underline{j}(\underline{r}, t) = \nabla \cdot \underline{j}^*(\underline{r}, t)$$

$F[\phi]$ hat wieder Grenzbedingung-Term!

Beachte: Mit $\phi(\underline{r}, t) = \psi(\underline{r}, t)$

$$\text{und } \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$$

ergibt sich aus Modell B
gerade die Ginzburg-Landau-Theorie!

(II.2)

Auch bei Modell B muß die Austauschkraft wieder einen FDT genügen:

$$\begin{aligned} &< \zeta(r_1, t) \zeta(r_2, t') > \\ &= -2k_B T M \nabla^2 \delta(r_1 - r_2) \delta(t - t') \end{aligned}$$

Anwendung von Modell A

Dynamik der Magnetisierung
eines Ferromagneten

Hintergrund:

Im Gleichgewicht gibt es einen Phasenübergang
2. Ordnung von einer paramagnet. in eine
ferromagnetische Phase:

OP: Magnetisierung $M(r, t)$
(nehme dreh als Skala- a)

Beschreibung des Phasenübergangs mittels einer
Ginzburg-Landau-Freie Energie

$$F[M] = \int dV \left(\frac{a}{2} (T - T_c) M^2 + \frac{b}{4} M^4 + \frac{c}{2} (\nabla M)^2 - Mh \right)$$

$$a, b, c > 0$$

h : externe Feld

T_c = krit. Temperatur

Das statistische Gewicht einer bestimmten Konfiguration $M(\underline{r})$ ist gegeben durch

$$P^{eq}(M) \sim e^{-\beta F[M]}$$

\Rightarrow Die wahrscheinlichste Konfiguration $M(\underline{r})$ ist gegeben durch:

$$\frac{\delta F}{\delta M(\underline{r})} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow a(T - T_c) M(\underline{r}) + b(M(\underline{r}))^3 \quad (*)$$

$$-c \Delta M(\underline{r}) - h = 0$$

Betrachte $h=0$ und nehme an, dass das System dann (im Mittel!) homogen ist

$$\Rightarrow a(T - T_c)M + bM^3 = 0 \quad (**)$$

Magnetisierung ($T < T_c$)

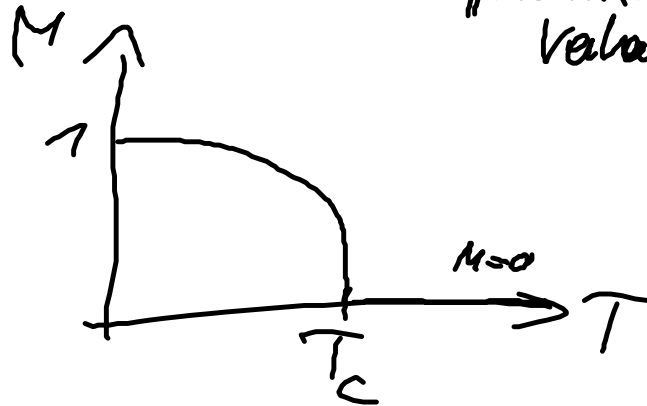
aus (**)
 $\rightarrow a(T - T_c) + bM^2 = 0$

dividiere durch M ,
 da man weiß,
 dass $M \neq 0$ für $T < T_c$

$$\rightarrow M \sim (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

Potenzgesetz:

"Meanfield-
 Verhalten"



Suszeptibilität

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0}$$

benutze (**) mit $h \neq 0$

$$a(T - T_c)M + bM^3 - h = 0$$

$$\rightarrow a(T-T_c) \frac{\partial M}{\partial h} + b 3M^2 \frac{\partial M}{\partial h} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial h} (a(T-T_c) + 3bM^2) = 1$$

$$\text{Sei } T > T_c \Leftrightarrow M=0 \quad \text{falls } h=0 \Rightarrow \chi = \frac{1}{a(T-T_c)}$$

$\Rightarrow \chi$ hat Curie-Verhalten
für $T \rightarrow T_c$

Spin-Spin-Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \chi_{MM}(|r-r'|) &= \langle M(r) M(r') \rangle \\ &\quad - \langle M(r) \rangle \langle M(r') \rangle \\ &\quad \sim \frac{e^{-|r-r'|/\xi}}{|r-r'|} \end{aligned}$$

mit ξ „Korrelationslänge“

Nächst am Phasenübergang gilt:

$$\xi \sim (T-T_c)^{-\frac{1}{2}}$$

divergiert also bei Annäherung an T_c
"von oben"

⇒ Räumliche Korrelationen werden langreichweitig:
für $T \rightarrow T_c$

$$\chi_{MM}(1z-1) \sim \frac{1}{|z-1|}$$

Frage: Wie ist die Relaxation der Magnetisierung
dicht am Krit.-Punkt?

Idee: Räumliche Korrelationen werden
(Frage) langreichweitig

→ ~~S~~ Relaxation wird
extrem langsam?

Untersuchung mittels Modell A

$$\frac{\partial M(z,t)}{\partial t} = -\lambda \frac{\delta F[M]}{\delta M(z,t)} + \underbrace{\eta(z,t)}_{**}$$

$\lambda > 0$ charakteristisch
die Relaxationsrate
(Stochast. Kraft
(aus den übrigen
Freiheitsgraden, z.B.
Spinfluctuationen))

FDT:

$$\langle \eta(\underline{r}, t) \rangle = 0$$

$$\langle \eta(\underline{r}, t) \eta(\underline{r}', t') \rangle = \gamma \int d\underline{r} d\underline{r}' d(\underline{r} - \underline{r}') d(t - t')$$

Einsetzen von $\frac{\delta F}{\delta M}$: ($\hbar \neq 0$!)

$$\frac{\partial}{\partial t} M(\underline{r}, t) = -\lambda \left(a(T - T_c) M(\underline{r}, t) + b \overline{M(\underline{r}, t)}^2 - c \Delta M(\underline{r}, t) \right) + \eta(\underline{r}, t) \quad (\text{meanst.})$$

Auswertung durch Fouriertransform.

$$\hat{M}(\underline{k}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} M(\underline{r}, t)$$

$$\hat{\eta}(\underline{k}, t) = \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} \eta(\underline{r}, t)$$

⇒ Gleichung im Fourierraum:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{M}(\underline{k}, t) = -\lambda \left(a(\bar{T} - T_c) \hat{M}(\underline{k}, t) + c k^2 \hat{M}(\underline{k}, t) \right) + \hat{\eta}(\underline{k}, t)$$

$$\langle \hat{\eta}(\underline{k}, t) \rangle = 0$$

$$\langle \hat{\eta}(\underline{k}, t) \hat{\eta}(\underline{k}', t') \rangle = 2\lambda \frac{k_B T}{d} \delta_{\underline{k}', -\underline{k}} \delta(t-t')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{M}(\underline{k}, t) = -\lambda (a(\bar{T} - T_c) + c k^2) \hat{M}(\underline{k}, t) + \hat{\eta}(\underline{k}, t)$$

Diese Gleichung hat genau dieselbe Struktur wie die bekannte Langevin-Gl.: $(\dot{v} = -\gamma v + f(t))$

⇒ Wir können sofort schließen (aus Kap I. S. 2)

$$\hat{M}(\underline{k}, t) = \hat{M}(\underline{k}, 0) e^{-\gamma_k t} + e^{-\gamma_k t} \int_0^t dt' e^{\gamma_k t'} \hat{\eta}(\underline{k}, t')$$

$$\text{mit } \gamma_k = \lambda (a(\bar{T} - T_c) + c k^2)$$

$$\Rightarrow \langle \hat{M}(\underline{k}, t) \rangle = \hat{M}(\underline{k}, 0) e^{-\gamma_k t}$$

↑
 Nachst.
 Mittelwert

Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned}
 & \langle \hat{M}(\underline{k}, \epsilon) \hat{M}(\underline{k}, \epsilon') \rangle \\
 &= \frac{2\lambda k_B T}{2\gamma_k} e^{-\gamma_k (|\epsilon - \epsilon'|)} \\
 & \quad + e^{-\gamma_k (\epsilon + \epsilon')} \left(\langle (M(\underline{k}, 0))^2 \rangle - \frac{2\lambda k_B T}{2\gamma_k} \right)
 \end{aligned}$$

Betrachte große Zeiten (oder benutze den Gleichverteilungssatz)

$$\Leftrightarrow \langle (M(\underline{k}, 0))^2 \rangle = \frac{k_B T}{(\gamma_k / \lambda)}$$

$$\begin{aligned}
 & \langle \hat{M}(\underline{k}, \epsilon) \hat{M}(\underline{k}, \epsilon') \rangle \\
 &= \frac{k_B T \lambda}{\gamma_k} e^{-\gamma_k |\epsilon - \epsilon'|} \\
 &= \frac{k_B T}{\alpha(T - T_c) + c k^2} e^{-\gamma_k |\epsilon - \epsilon'|}
 \end{aligned}$$

Die zeitliche Korrelationsfunktion zerfällt in der Nähe des Unt.-Punktes offensichtlich exponentiell mit der Relaxationsrate

$$\gamma_k = \lambda (a (T - T_c) + c k^2)$$

Bei festem $k = |k|$ nimmt die Relaxationsrate bei Annäherung an T_c (d.h. für $T \rightarrow T_c$) drastisch ab!

insbesondere $\gamma_k \Big|_{k=0} = \lambda a (T - T_c) \rightarrow 0$

\Rightarrow Die Relaxationszeit $\tau_k = \frac{1}{\gamma_k}$ divergiert also ($k \rightarrow 0$) oder wird zumindest extrem groß!

~~critica~~ „critical slowing down“

Typisches Phänomen in der Nähe von Phasenübergängen ? - Ordnung!