

2.5.2 Lösung der paraxialen Wellengleichung

paraxiale Wellengleichg. $\left(\partial_z + \frac{1}{2ik_2} \Delta_{\perp} \right) \tilde{E}(\xi, y, \vec{r}_{\perp}) = 0$

↑ Ausdrucksrichtg.
↑ Zeit
↓ Raumkoordinaten

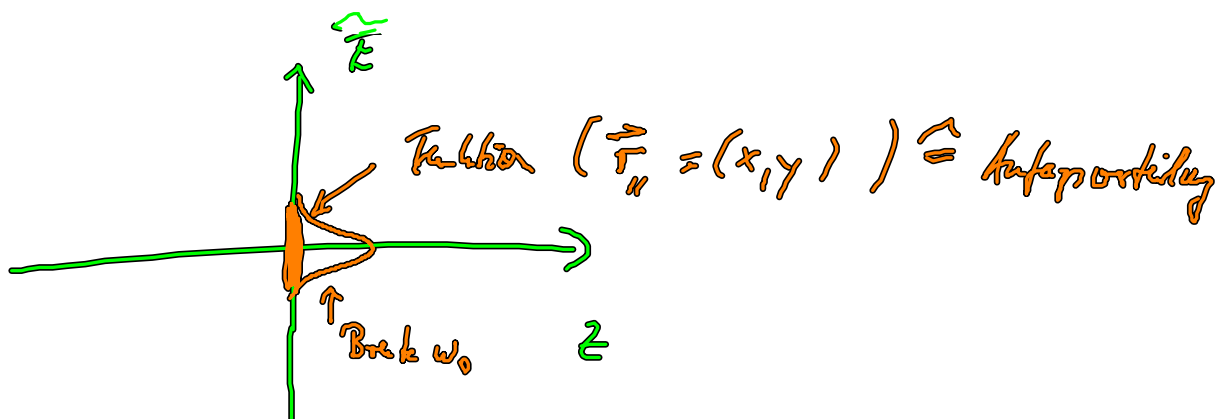
Gesamfeld: $E = \tilde{E}(\xi, y, \vec{r}_{\perp}) e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}$

≙ Bewegung von links nach rechts

↳ nur Vorwärtsrichtg. in Theorie

lineare partielle Dgl., man sollte FT anwenden:

dazu Anfangswertg. an Ort $z = \xi = 0$:



Anfangswertg. / Randbeding bei $z=0$

$$\tilde{E}(\vec{r}_0, z < 0 = \{) = \vec{E}_0 e^{-\sqrt{r_0^2}/w_0^2} \quad r_0^2 = x^2 + y^2$$

↑
Zahl

Lösung im Fourierraum bzgl $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{q}_0$

$$\left(\partial_z + \frac{1}{2ik_z} \Delta_{\perp} \right) \tilde{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\partial_z - \frac{1}{2ik_z} q_0^2 \right) \tilde{E} = 0$$

Lösung ist: $\tilde{E}(\xi, q_0) = \tilde{E}(\xi=0, q_0) e^{-\frac{i}{2k_z} q_0^2 \xi}$

man muß dann in Realraum zurück transformieren

$$\tilde{E}(\xi, \vec{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 q_0 e^{i \vec{q}_0 \cdot \vec{r}_0} \tilde{E}(\xi=0, q_0) e^{-\frac{i}{2k_z} q_0^2 \xi}$$

↑
2D-Fourier bei
Rückwrt

zurückgeführt auf $\tilde{E}(\xi=0, q_0)$

mit Hilfsformel f. Gauß Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2 + ibx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a}$$

Ergebnis der Rechnung:

$$\tilde{E}(z=0, r_0) = E_0 \pi w_0^2 e^{-r_0^2 w_0^2 / 4}$$

$$\tilde{E}(z, y, \vec{r}_0) = E_0(y) \frac{\exp\left(-\frac{r_0^2}{w_0^2(1+2i\gamma(k_z w_0^2))}\right)}{(1+2i\gamma(k_z w_0^2))}$$

↑
Zeitabhängigkeit
kann hier mit ein-
gebracht werden

$$\text{Funktion v. } t - \frac{z}{c} = y$$

↑
geometrischer Stellen-
verlauf

Dieses Lichtstrahl wird Gaußstrahl genannt

2.5.3. Bemerk. zum Gaußstrahl

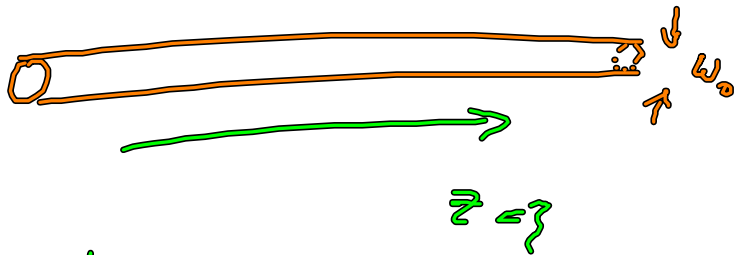
a) - Gaußstrahl durch 2 Parameter gegeben: $w_0, z_0 = \frac{k_z w_0^2}{2}$

(Breite bei $z=0$ (w_0), Frequenz z und Breite (z_0))

- meist gewählte Ansatz um Strahl zu beschreiben

- existiert auch in Wellenleiter, Resonatoren

- einfache Lichtstrahl $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-r_0^2/w_0^2} e^{ikz}$



Bedingung dafür ist

$$z / k w_0^2 \ll 1$$

$$\downarrow \frac{z}{w_0} \ll \frac{2\pi}{\lambda} w_0$$

↳

$$\frac{\text{Höhe}}{\text{Breite}} = 100 \ll 10.000, \quad \lambda \approx 600 \text{ nm}$$

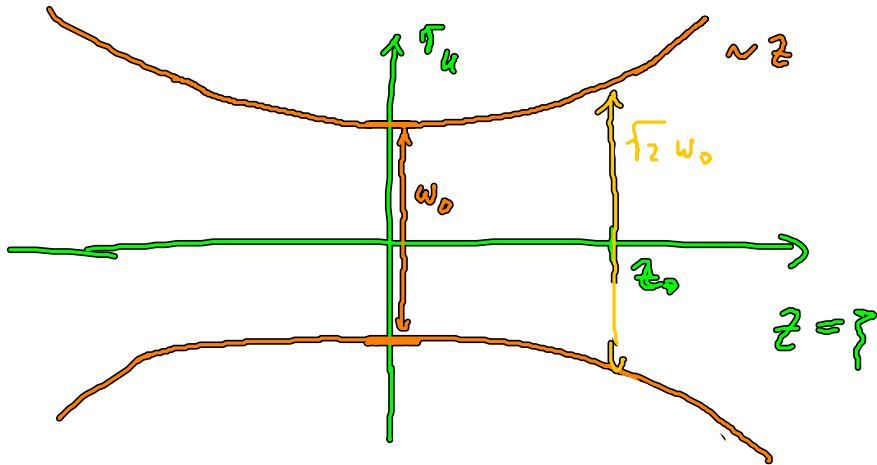
$$\frac{w_0 2\pi}{\lambda} \approx \frac{w_0}{100 \text{ nm}} \stackrel{!}{=} 10^4$$

$$w_0 = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

b) Intenität

$$|\tilde{E}|^2 = |E_0|^2 \frac{e^{-\frac{r_k^2}{w_0^2}} \cdot \frac{2}{1 + (z/z_0)^2}}{1 + (z/z_0)^2}$$

$z_0 = \frac{k \cdot w_0^2}{2}$ Rayleigh Länge

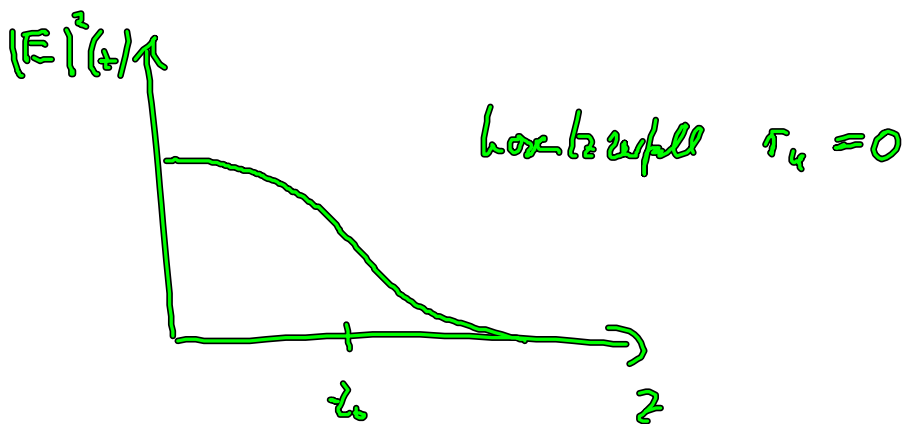


Die Kurve kann
 durch z_0 im
 Vergleich mit Länge
 z abgeleitet werden

Stahlbreite $w_0 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^{1/2}$

(durch die Einschränkung d.
 Strahls auf w_0 zu bilden
 Ausbreitungsvektor in \vec{F}_k -Richtung)

Intenität a/ z-Achse



c) Wellenfront

Phase auslesen der Pulse:

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0 \frac{w_0}{w(z)}}_{\text{Amplitude}} e^{-\left(\frac{r_n}{w(z)}\right)^2} ; \underbrace{k_2 r_n^2 / 2R(z) - i\varphi_0(z) + (k_2 z - \omega_2 t)}_{\text{Phase}}$$

$$w(z) = w_0 \left(1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right)^{1/2} \quad \text{Strahlbreite}$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right) \quad \text{Wahrradius}$$

$$\varphi_0(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{Phase}$$

Phase: $\varphi = \underbrace{\frac{k_2 r_n^2}{2R(z)}}_{\text{Golatensireffekt}} - \varphi_0(z) + \underbrace{k_2 z - \omega_2 t}_{\text{star Welle}}$

Phase im Fernfeld

($z \rightarrow \infty$)

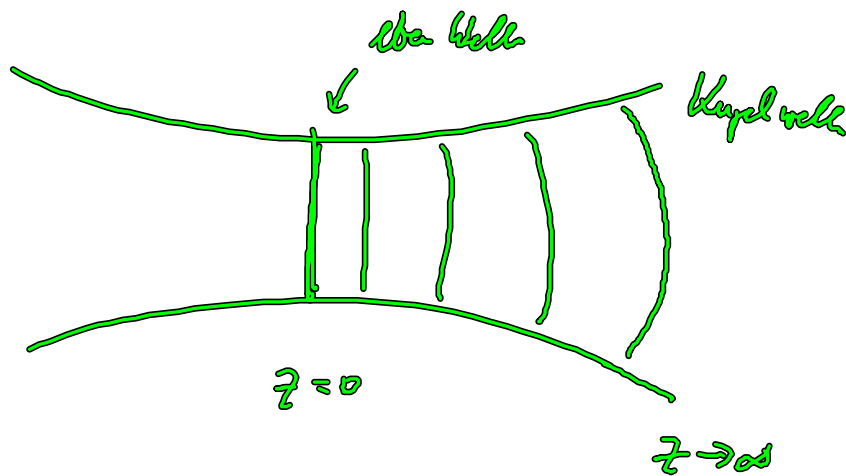
$$\varphi \rightarrow k_2 \left(z + \frac{r_n^2}{2z}\right) + k_2 z - \omega_2 t$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{1. Taylor der Wurzelfkt.}} \\ & \approx k_z \left(\sqrt{z^2 + r_0^2} \right) - \omega_c t \\ & = k_z r - \omega_c t \rightarrow \text{Kugelwelle im Fernfeld} \end{aligned}$$

Phasen im Nahfeld $z \rightarrow 0$

$$R(z) \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = k_z z - \omega_c t$$

in der Ebene $z=0$ liegt ein ebener Wellen vor



d) Gauß'sche ist keine exakte Lösung.

hinzu: Wellen in x oder y Richtg. polarisiert
und in z Richtg. Ausbreitung.

aber $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow$

$$\begin{array}{c} \vec{E}_x \\ \uparrow \\ \text{z} \end{array} \quad \partial_x E_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_x E_x = -\frac{2x}{\omega(z)^2} E_x \neq 0 \rightarrow \text{stimmt also nicht,}$$

\uparrow
 Gaußsche
 $\text{d.h. } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

komensieren diesen Fehler durch z-Komponente:

$$\partial_z E_z + \partial_x E_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\partial_z E_z = -\partial_x E_x = \frac{2x}{\omega^2(z)} E_x$$

\uparrow
 Ansatz $e^{ik_z z}$

$$\boxed{E_z = \frac{2x}{ik_z \omega^2(z)} E_x}$$

Strahl enthält i.a. Beibz die in
Ausbreitungsrichtung polarisiert sind.

e) höherer Grad der Lösung können folgendes u.ä. be-

zeichnet werden:

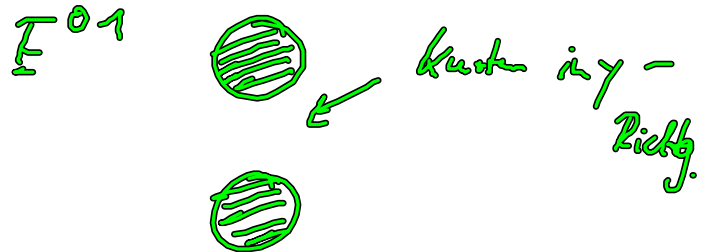
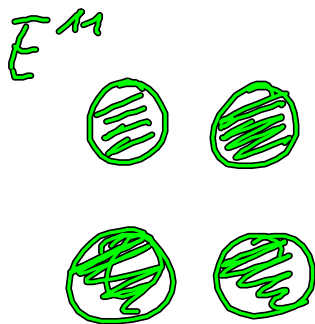
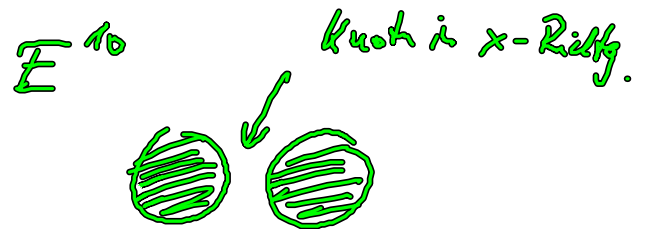
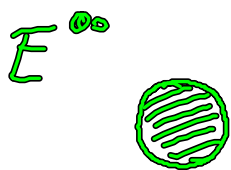
\tilde{E} was die Lsg. ein kom-ge Dgl.

$$\rightarrow \text{and } E^{un} = \partial_x^u \partial_y^u \tilde{E} \omega_0^{un}$$

\uparrow \uparrow
 Gradzahl Normierung.

sind Lösungen die durch bestimmte

transverse RB charakterisiert sind

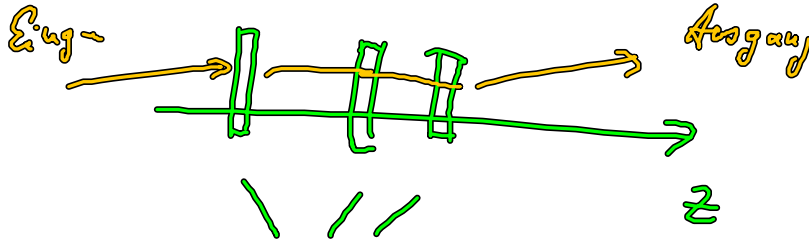


In Abhängigkeit von Punkten erhält man die

Moden (Hermit - Gauß - Funktionen)

3. Einfachste optische Elemente in der Paraxialoptik

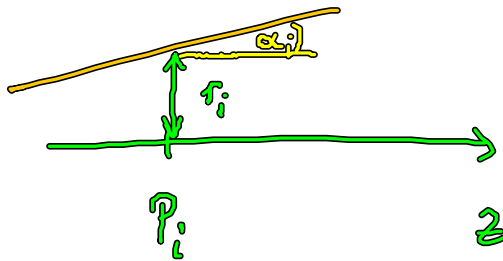
Optisch System



optisch Abbildung
bedeuten

Optisch Elemente

Zylinder symmetrisch System

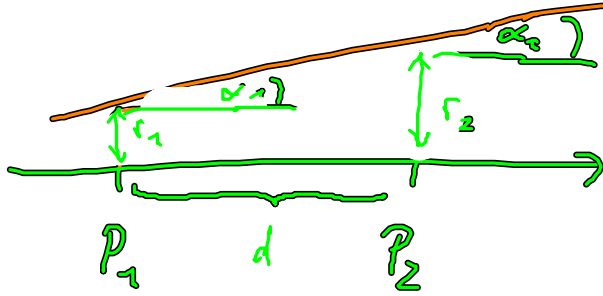


Lichtstrahl durch Pkt i
ist mit z groß beschrieben

$$\vec{s}_i = (r_i, \alpha_i)$$

jedes optisch Element ändert Abstand und Winkel
 r α

a) Ausbreitung in freier Raum



achsenwechsel Ansbrotz $\text{tg } \alpha \approx \alpha$

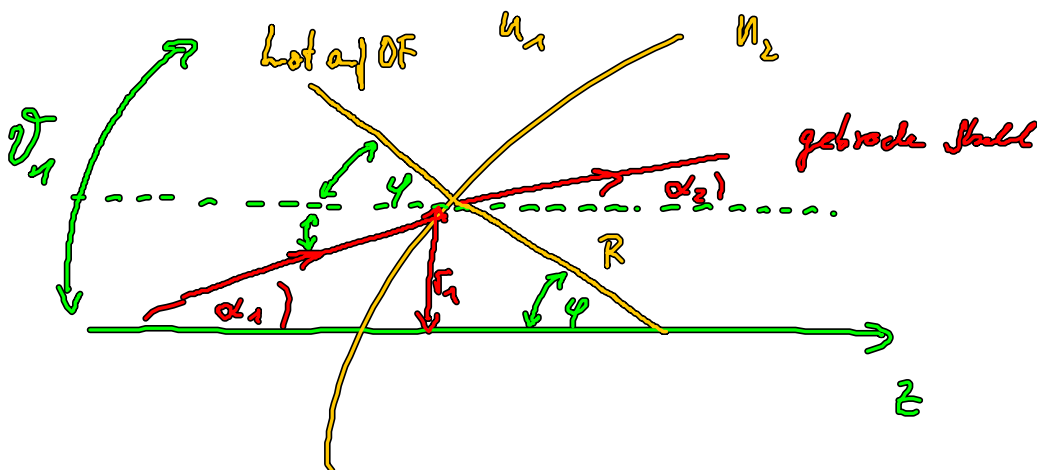
$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + \text{tg } \alpha_1 \cdot d \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_2 = \hat{T}_{FR} \vec{s}_1$$

Matrix f. Ansbrotz in freien Raum:

$$\hat{T}_{FR} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) bruchene Oberfläche



Brechungsindex $\sin \vartheta_1 u_1 = \sin \vartheta_2 u_2$ (ED)

oder weil $\vartheta_1 u_1 = \vartheta_2 u_2$

$$\vartheta_1 = \alpha_1 + \varphi = \alpha_1 + \frac{r_1}{R}$$

$$\vartheta_2 = \alpha_2 + \varphi = \alpha_2 + \frac{r_1}{R}$$

↓

$$u_1 \left(\alpha_1 + \frac{r_1}{R} \right) = u_2 \left(\alpha_2 + \frac{r_1}{R} \right)$$

$$\rightarrow \alpha_2 = \frac{u_1}{u_2} \alpha_1 + \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right) \frac{1}{R} r_1 \quad \text{f. } \alpha_2$$

$$\rightarrow \text{f. } r_1 = r_2$$

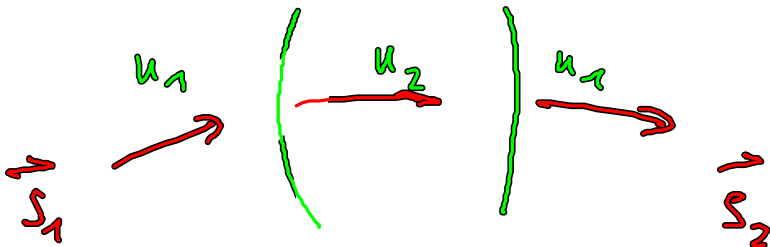
Matrix f. brechend. Objektiv:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right) \frac{1}{R} & \frac{u_1}{u_2} \end{pmatrix}}_{\hat{T}_B} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

$R \rightarrow \infty$ $\left. \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} u_1$ für parallel Ob-Objekt
 als front fall

$$\hat{T}_B / \text{plane OF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{u_1}{u_2} \end{pmatrix}$$

c) Linse



die Matrix für ein solch System lautet

$$\vec{S}_1 = \hat{T}_L \vec{S}_2$$

$$\hat{T}_L = \hat{T}_{B_2} \hat{T}_{FP} \hat{T}_{B_1}$$

$$\hat{T}_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} \left(\frac{u_2}{u_1} - 1 \right) & \frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right) & \frac{u_1}{u_2} \end{pmatrix}$$

↑
negativer Kreisradius

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{R} \left(\frac{u-1}{u} \right) & \frac{d}{u} \\ (u-1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} - \frac{d(u-1)^2}{R_1 R_2 u} \right) & 1 + \left(\frac{u-1}{u} \right) \frac{d}{R_2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u_1 = 1 \\ u_2 = u \end{matrix}$$

Grenzfall dicker Linse $\begin{pmatrix} d \\ \rightleftharpoons \end{pmatrix} \quad d \rightarrow 0$ Vgl. mit R_1, R_2

$$\overset{1}{T}_{dL} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$-f^{-1} = (u-1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

f : Brennweite

Ausgang:

- ABCD - Transfermatrixoptik Methode

- $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ Matrizen: Linse, Linsensystem
Wahllicht, Fernrohr

→ Mgl. Stahlgröße f komplexer Systeme

- Reflexion kann auch behandelt werden
- \exists komplexes Regelwerk um kompliziertes System zu beschreiben.