4. Lineare Antwort

lineare Antwort $\hat{=}$ $\vec{j}, \vec{P} \cong \vec{E}$

($\vec{E}$ tritt nur in linearer Ordnung auf)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\vec{j} = \sigma(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \underbrace{-i\omega P}_{\text{formal}} = \underbrace{-i\omega \varepsilon_0 \chi}_{\sigma} E$$

σ kann auch durch χ (angepaßt) beschrieben werden

4.1. Die Brechzahl

χ - Antwortfunktion (linear)

es reicht eine Theorie für χ - Suszeptibilität zu machen:

enthält im Prinzip $\vec{P}$ und $\vec{j}$ - Informationen

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = \mu_0 \partial_t^2 \vec{P}$$

reicht aus, wenn $\vec{j}$ vorliegt, dann χ anpassen.

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = -\mu_0\,\omega^2\,\vec{P} \qquad \text{Frequenzraum}$$

$$- \quad " \quad - \quad = -\mu_0\,\omega^2\,\varepsilon_0\,\chi(\omega)\,\vec{E}(\omega,\vec{r})$$

$$c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$$

$$\Delta\vec{E}(\omega) - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\left(1+\chi(\omega)\right)}\vec{E} = 0$$

Definition der Brechzahl: $n^2(\omega)$

für ebene Wellen: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (z - Richtung)

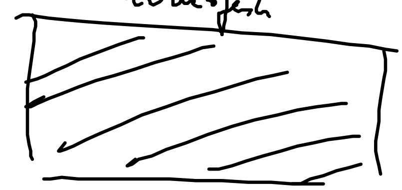
Sind die Lösungen:

$$\vec{E} = E_0(\omega)\, e^{\pm i k(\omega) z}$$

$$k(\omega) = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}$$

4.2. Lineare Antwort v. Dielektrika (Lokalisierte Dipole $\vec{P}$)

homogen



$$\vec{P} = \sum_{lm} \vec{d}_{lm}\, \rho_{lm}(t)\, n_0$$

lokalisierte atomare Niveaus

Anzahldichte n_0 der Dipole $\left(\frac{\text{Zahl}}{\text{m}^3}\right)$

$$\dot{\rho}_{lm} = i\omega_{lm}\,\rho_{lm} - i \sum_{n} \big(\Omega^*_{lk}\, \underbrace{\rho_{nm}}_{\delta_{nm}\rho_m} - \Omega_{nm}\, \underbrace{\rho_{ln}}_{\delta_{ln}\rho_l} \big) - \gamma\rho_{lm}$$

lineare Optik: $\rho_{lm} \sim \Omega$, keine höheren Potenz

$\Omega_{lk}\,\rho_{nm}$ soll linear in Feld sein, daher, weil $\rho_{nm} \sim \Omega$

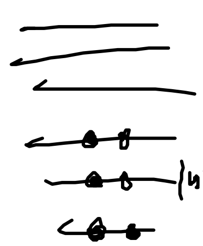
→ Kronecker ansatz (siehe oben)

$$-i\omega\,\rho_{lm} = i\omega_{lm}\,\rho_{lm} - i\big(\Omega^*_{lm}\underbrace{\rho_{mm}}_{\text{Besetzung } \rho_m} - \Omega_{ml}\underbrace{\rho_{ll}}_{\rho_l}\big) - \gamma\rho_{lm}$$

ρ_m darf nicht von Feld Ω abhängen

→ können nur durch die AD gegeben sein

vor dem Feld



$\rho_m = 0$ (unbesetzt)

$\Rightarrow \rho_n = \text{fest} = 1$

$$\Omega^*_{\ell m} = \frac{\vec{d}^*_{\ell m} \cdot \vec{E}(\vec{r},\omega)}{\hbar}$$

$$\rho_{\ell m} = \frac{\vec{E}(\omega) \cdot \vec{d}_{m\ell}}{\hbar} \frac{-i(\rho_m - \rho_\ell)}{-i(\omega_{\ell m} + \omega) + \gamma}$$

$$\vec{P}(\vec{r},\omega) = n_0 \sum_{\ell m} \frac{\vec{d}_{\ell m} \; \vec{E}(\vec{r},\omega) \cdot \vec{d}_{m\ell}}{(\omega_{\ell m} + \omega) + i\gamma} (\rho_m - \rho_\ell) \equiv \underline{\underline{\varepsilon_0 \chi E}}$$

<u>ablesen d. Vgl.:</u>

$$\chi(\omega) = \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_{\ell m} \frac{(\vec{d}_{\ell m})^2 (\rho_m - \rho_\ell)}{\omega + (\omega_\ell - \omega_m) + i\gamma}$$

Suszeptibilität eines Mehr-niveausystems $\{|n\rangle\}$

Vektorcharakter + Anisotropien nicht berücksichtigt, eigentlich ist χ ein Tensor

$$\vec{P} = \hat{\chi} \otimes \vec{E}$$

Σ läuft über ℓ, m besetzte Zustände

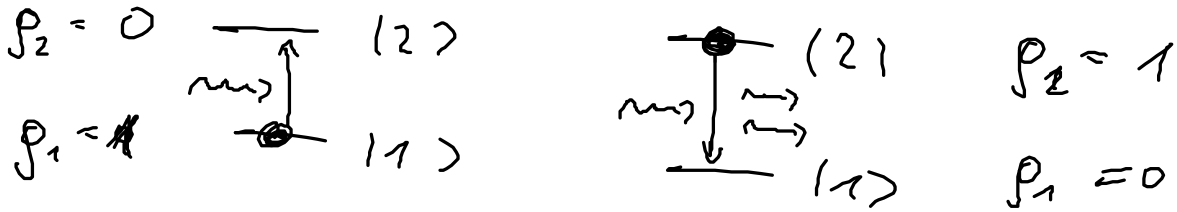
$\rho_\ell = 0$, wenn unbesetzt

<u>einfaches Bsp</u> Suszeptibilität eines Zweiniveausystems ohne permanente Dipole

$$\chi(\omega) = \frac{u_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{|d_{12}|^2(\rho_1-\rho_2)}{(\omega+\omega_{21})+i\gamma} + \frac{|d_{21}|^2(\rho_2-\rho_1)}{(\omega+\omega_{12})+i\gamma}\right)$$

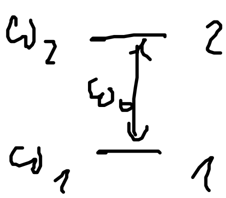
<u>Unterschied zu Oszillatormodell</u> ist Term $(\rho_e - \rho_u)$

$\hat{=}$ Besetzungswahrscheinlichkeitsunterschied



$$\chi(\omega) = \frac{u_0 |d_{12}|^2}{\varepsilon_0}(\rho_1-\rho_2)\left(\underbrace{\frac{-i\gamma + (\omega+\omega_0)}{(\omega+\omega_0)^2+\gamma^2}}_{\text{nichtresonant, wird weglasse}} + \underbrace{\frac{i\gamma - (\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}}_{\text{Resonanz}}\right)$$

$\omega > 0$



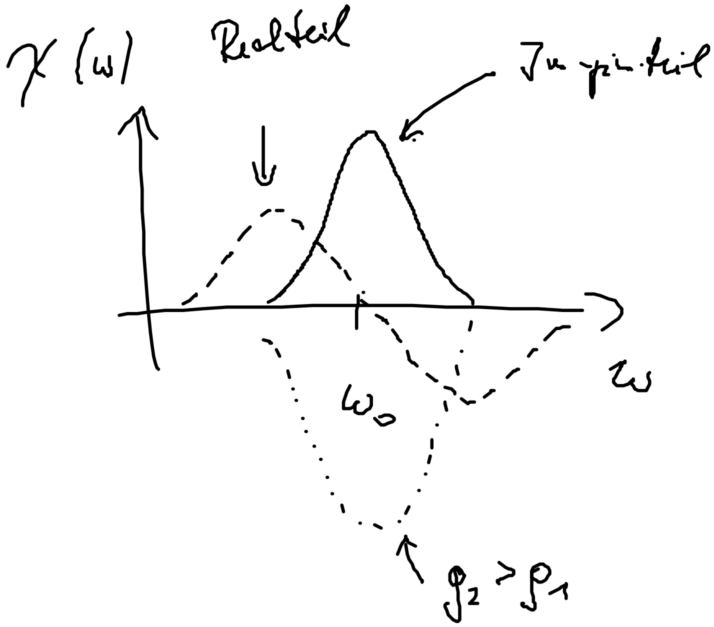
$\omega_{12} = -\omega_0$

$\parallel$

$\omega_1 - \omega_2 < 0$

$\omega_0 > 0$

$$\chi(\omega) = \frac{n_0 |d_{12}|^2}{\varepsilon_0} \underbrace{(\rho_1 - \rho_2)}_{\text{quantenmech. Vorfaktor}} \frac{i\gamma - (\omega - \omega_0)}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$



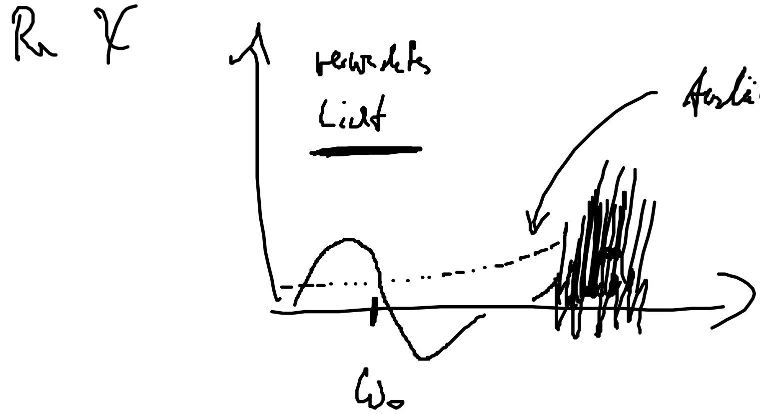
für $\rho_2 > \rho_1$

für $\rho_2 > \rho_1$ findet man Übergang von Absorption zu Verstärkung

im allgemeinen teilt man die optische Welle in 2 Teile:

1) resonante, interessante Material

2) nichtresonante Hintergrundmaterial

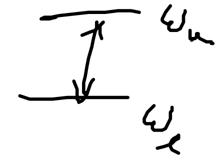


Ausläufer d. dispersiven Anteils (Realteil) der weit entfernten Resonanze

χ_{nr}

$$(\omega_e - \omega_m) \gg \gamma, \omega$$

$$\chi_{nr} = \frac{N_0}{\varepsilon_0} \sum_{e,m} \frac{|d_{em}|^2 (\rho_m - \rho_e)}{(\omega_e - \omega_m)}$$



→ das Hintergrundsmaterial zeigt sich als „fast" Konstante $\mathrm{Re}(\chi) = \chi_{nr}$

$$n^2(\omega) = 1 + \chi = 1 + \chi_{nr} + \chi_{res}(\omega)$$

schwache Abhängigkeit von ω Zweiniveausystem

$$n(\omega) \approx \underbrace{(1+\chi_{nr})^{1/2}}_{n_{nr}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_{res}}{1+\chi_{nr}}\right)$$

$$= n_{nr} + \frac{1}{2} \frac{\chi_{res}}{n_{nr}}$$

wenn $\chi_{nr} \gg \chi_{res}$ muß getestet werden

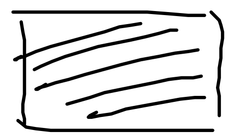
4.3. Lineare Antwort v. Elektronenflüssigkeit (Metallelektronen Plasma)

$$\vec{j} = \vec{v}(\vec{r},t)\, n(\vec{r},t)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\gamma \vec{v} \underbrace{- \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}_{\text{nichtlinearer Term (NLO)}} + \frac{q}{m} \vec{E}(\vec{r},t)$$

$\Rightarrow$ in linearer Optik:

$$\dot{\vec{v}} + \gamma \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E}$$



n darf nicht von $\vec{E}$ abhängen

und wird zu Beginn als räumlich homogenes System angenommen

$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \vec{v}(\vec{r},\omega)\, n$$

$$-i\omega\vec{v}(\omega) + \gamma \vec{v}(\omega) = \frac{q}{m} \vec{E}(\omega)$$

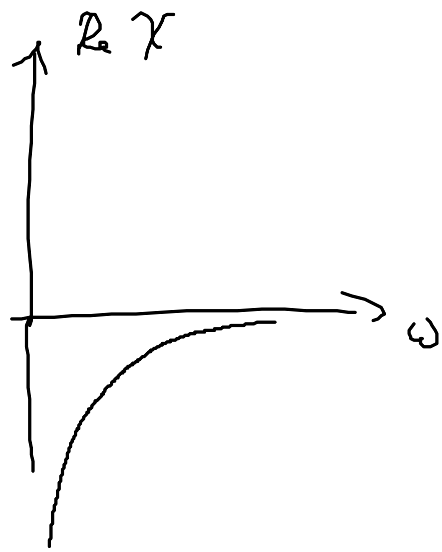
$$\vec{j}(\omega) = \frac{q}{m} \frac{n}{(-i\omega+\gamma)} \vec{E}(\omega) = \sigma(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\sigma(\omega) = \frac{q}{m}\,\frac{n_0}{(-i\omega+\gamma)}$$ Leitfähigkeit d. Elektronenflüssigkeit

$$\rightarrow \chi = \frac{q}{\varepsilon_0 m}\,\frac{n}{-i\omega(-i\omega+\gamma)} = \frac{\omega_{pl}^2}{-i\omega(-i\omega+\gamma)}, \quad \omega_{pl}^2 = \frac{n q}{\varepsilon_0 m}$$ Plasmafrequenz

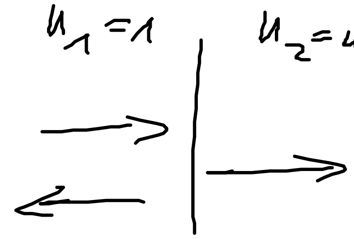
Suszeptibilität f. Elektronenflüssigkeit $\hat{=}$ Drudemodell

$$\underset{\gamma \to 0}{n^2} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$



4.4. Anwendung: Lineare Antwort an Grenzflächen

4.4.1. Ebene Welle an Grenzfläche



Grundlage: Fresnelformeln ($\perp$ Einfall)

Transmission $$T = \left| \frac{2 n_1}{(n_1 + n_2)}\,\frac{e^{i k_2(\omega) z}}{e^{i k_1(\omega) z}} \right|^2 = \frac{\text{transmittiert}}{\text{einfallend}}$$

$$= \underbrace{\frac{4}{(1+n_r)^2 + n_i^2} \; e^{-2 k_i(\omega) z}}$$

$k_i(\omega) = \mathrm{Im}(k_2(\omega))$

$k_i(\omega) = \mathrm{Im}\left(\frac{n(\omega)\omega}{c}\right)$

Lambert-Beersches Gesetz f. Absorption

$$R = \left| \frac{(n_1 - n_2)\, e^{-ik_1(\omega) z}}{(n_1 + n_2)\, e^{ik_1(\omega) z}} \right|^2 = \frac{\text{reflektiert}}{\text{einfallend}}$$

$$= \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| = \left| \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right| = \frac{(1-n_r)^2 + n_i^2}{(1+n_r)^2 + n_i^2}$$

$n_r, n_i \; (\omega)$

4.4.2 Eindringtiefe $\quad (e^{-\kappa z}$

$$\kappa = 2 n_i \frac{\omega}{c} = \begin{cases} \text{Dielektrikum: } 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\mathrm{Im}\,\chi_{res}}{n_{nr}} \frac{\omega}{c} \\ \text{Elektronenflüssigkeit: } \frac{2}{c} (\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2} \quad (\omega < \omega_{pe} \text{ sonst } 0) \end{cases}$$

inverse Eindringtiefe

Dielektrikum: der Imaginärteil der Suszeptibilität bestimmt die Absorptionslänge κ^{-1}

Elektronenflüssigkeit: $n = \left(1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_{pl}^2\right)^{1/2}$

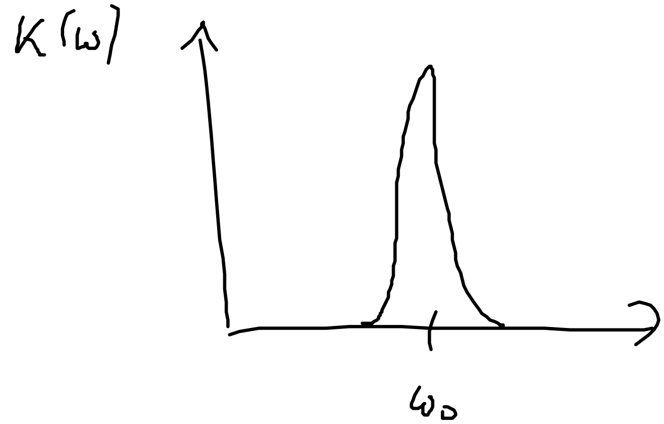
$(\gamma \to 0)$

$\to \omega < \omega_{pl} \to n_i \neq 0$

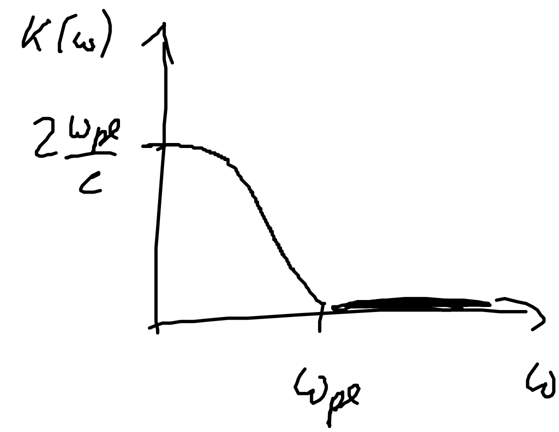
Metallkante

$\omega > \omega_{pl} \to n_i = 0$

Dielektrikum



Elektronenflüssigkeit



Absorption folgt einer Lorentz-Linie, die Breite der Linie ist γ und wird durch die Verluste bestimmt (Dipolenergie → Umgebung.)

es entsteht eine endliche Eindringtiefe dadurch, daß man Plasmaschwingungen mit ω_{pl} anregt, und Licht kann nicht weiter eindringen $(\omega < \omega_{pl})$

4.4.3. Reflexion

Abhängig. d. Vorfaktors

a) Dielektrika: $$n = \left(1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\right)^{1/2}$$

des Zweiniveausystems

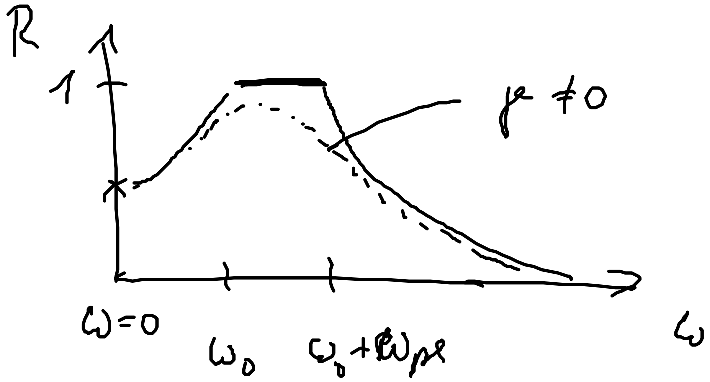
$$R = \left| \frac{1-n}{1+n} \right|^2$$

$\omega \to 0$: $n \to \left(1 + \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$

$\omega \to \infty$: $n \to 1$

$\gamma \to 0$: wenn $\omega^2 - \omega_0^2 < \omega_{pl}^2$ dann n rein imaginär

$$R = \frac{1^2 + n_i^2}{1^2 + n_i^2} = \underline{\underline{1}}$$



Reststrahlbande:

in diesem Bereich gibt es keine Ausbreitung von Licht im Material, wird komplett reflektiert

b) Elektr. flüssigkeit

$$n = \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{-\omega^2 - i\omega\gamma}\right)^{1/2}$$

analoge Formel wie a) $\omega_0 \to 0$