4. Lineare Antwort

lineare Antwort $\hat{=}$ $\vec{j}, \vec{P} \simeq \vec{E}$

(E tritt nur in linearer Ordnung auf)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}(\vec{r},\omega) = \underbrace{-i\omega P}_{\text{formal}} = \underbrace{-i\omega\varepsilon_0\chi}_{\sigma} E$$

σ kann auch durch χ (angepaßt) beschrieben werden

4.1. Die Brechzahl

χ - Antwortfunktion (linear)

es reicht eine Theorie für χ - Suszeptibilität zu machen:

enthält im Prinzip $\vec{P}$ und $\vec{j}$ - Informationen

$$\Delta\vec{E} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = \mu_0\,\partial_t^2\vec{P}$$

reicht aus, wenn $\vec{j}$ vorliegt, dann χ anpassen.

$$\Delta \vec{E} - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = -\mu_0\,\omega^2\,\vec{P} \qquad \text{Frequenzraum}$$

$$- \quad " \quad - \qquad = -\mu_0\,\omega^2\,\varepsilon_0\,\chi(\omega)\,\vec{E}(\omega,\vec{r})$$

$$c^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$$

$$\Delta \vec{E}(\omega) - \vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\underbrace{\left(1+\chi(\omega)\right)}_{\text{Definition der Brechzahl: } n^2(\omega)}\vec{E} = 0$$

für ebene Wellen: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ (z - Richtung)

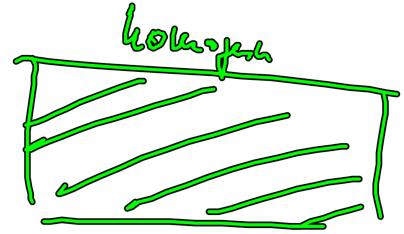
sind die Lösungen:

$$\vec{E} = E_0(\omega)\,e^{\pm i k(\omega) z}$$

$$k(\omega) = \frac{n(\omega)\,\omega}{c}$$

4.2. Lineare Antwort v. Dielektrika (Lokalisierte Dipole $\vec{P}$)

$$\vec P = \sum_{lm} \vec d_{lm}\, \rho_{lm}(t)\, n_0$$



Kohärenzen atomarer Niveaus

Anzahldichte n_0 der Dipole $\left(\frac{\text{Zahl}}{\text{cm}^3}\right)$

$$\dot\rho_{lm} = i\omega_{lm}\,\rho_{lm} - i\sum_k \Big(\Omega^*_{lk}\,\underbrace{\rho_{km}}_{\delta_{km}\rho_m} - \Omega_{km}\,\underbrace{\rho_{lk}}_{\delta_{lk}\rho_l}\Big) - \gamma\rho_{lm}$$

lineare Optik: $\rho_{lm} \sim \Omega$, keine höheren Potenz

$\Omega_{lk}\,\rho_{km}$ soll linear im Feld sein, daher, weil $\rho_{km} \sim \Omega$

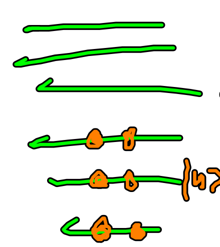
→ Kronecker ansatz (siehe oben)

$$-i\omega\,\rho_{lm} = i\omega_{lm}\,\rho_{lm} - i\Big(\Omega^*_{lm}\underbrace{\rho_{mm}}_{\text{Besetzung }\rho_m} - \Omega_{ml}\underbrace{\rho_{ll}}_{\rho_l}\Big) - \gamma\rho_{lm}$$

ρ_m darf nicht vom Feld Ω abhängen

→ können nur durch die AB gegeben sein

vor dem Feld



$\}\ \rho_m = 0$ (unbesetzt)

$|n\rangle\ \rho_n =$ fest $= 1$

$$\Omega^*_{em} = \frac{\vec{d}^*_{em} \cdot \vec{E}(\vec{r},\omega)}{\hbar}$$

$$\rho_{em} = \frac{\vec{E}(\omega) \cdot \vec{d}_{me}}{\hbar} \frac{-i(\rho_m - \rho_e)}{-i(\omega_{em} + \omega) + \gamma}$$

$$\vec{P}(\vec{r},\omega) = n_0 \sum_{em} \frac{\vec{d}_{em} \; \vec{E}(\vec{r},\omega) \cdot \vec{d}_{me}}{(\omega_{em} + \omega) + i\gamma} (\rho_m - \rho_e) \equiv \underline{\underline{\varepsilon_0 \chi E}}$$

<u>allgem. d. Vgl.:</u>

$$\chi(\omega) = \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_{em} \frac{|\vec{d}_{em}|^2 (\rho_m - \rho_e)}{\omega + (\omega_e - \omega_m) + i\gamma}$$

Suszeptibilität eines Mehrniveausystems $\{|n\rangle\}$

Vektorcharakter + Anisotropie nicht berücksichtigt, eigentlich ist χ ein Tensor

$$\vec{P} = \hat{\chi} \otimes \vec{E}$$

$\sum$ läuft über e, m besetzte Zustände

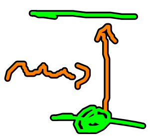
$\rho_e = 0$, wenn unbesetzt

<u>einfachstes Bsp</u> Suszeptibilität eines Zweiniveausystems ohne permanente Dipole

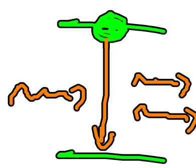
$$\chi(\omega) = \frac{N_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{|d_{12}|^2(\rho_1-\rho_2)}{(\omega+\omega_{21})+i\gamma} + \frac{|d_{21}|^2(\rho_2-\rho_1)}{(\omega+\omega_{12})+i\gamma}\right)$$

Unterschied zu Oszillatormodell ist Term $(\rho_e - \rho_m)$

$\hat{=}$ Besetzungswahrscheinlichkeitsunterschied

$\rho_2 = 0$  $|2\rangle$, $|1\rangle$

$\rho_1 = 1$

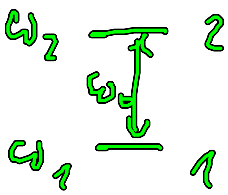
 $|2\rangle$, $|1\rangle$

$\rho_2 = 1$

$\rho_1 = 0$

$$\chi(\omega) = \frac{N_0 |d_{12}|^2}{\varepsilon_0}(\rho_1-\rho_2)\left(\underbrace{\frac{-i\gamma + (\omega+\omega_0)}{(\omega+\omega_0)^2+\gamma^2}}_{\text{nichtresonant, wird geglättet}} + \underbrace{\frac{i\gamma-(\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}}_{\text{Resonanz}}\right)$$

$\omega > 0$



$\omega_{12} = -\omega_0$

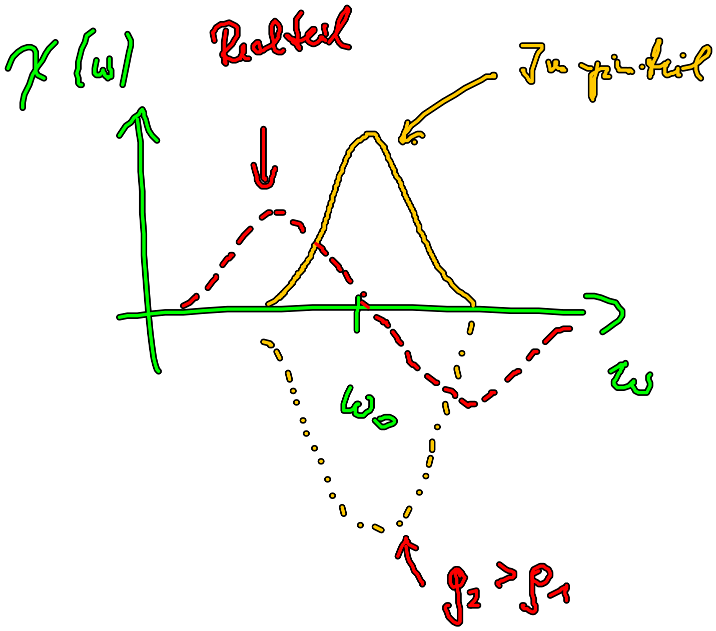
$\|$

$\omega_1 - \omega_2 < 0$

$\omega_0 > 0$

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_0 |d_{12}|^2}{\varepsilon_0} \underbrace{(\rho_1 - \rho_2)}_{\text{quantenmech. Vorfaktor}} \frac{i\gamma - (\omega-\omega_0)}{\gamma^2 + (\omega-\omega_0)^2}$$

für $\rho_2 > \rho_1$

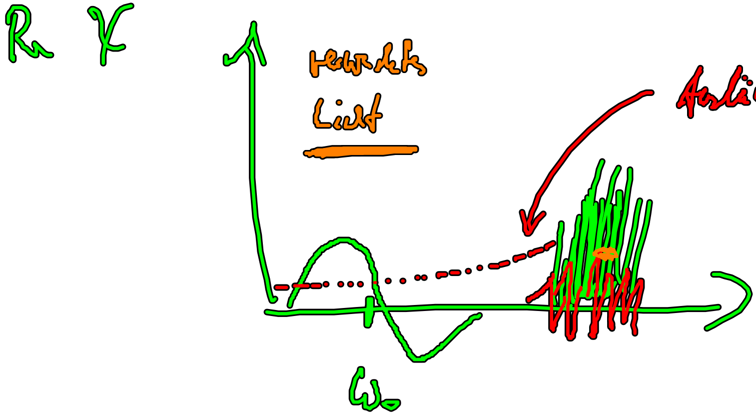


für $\rho_2 > \rho_1$ findet man Übergang von Absorption zu Verstärkung

im allgemeinen teilt man die optische Welle in 2 Teile:

1) resonantes, interessantes Material

2) nichtresonantes Hintergrundmaterial

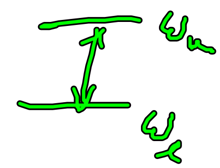


Ausläufer d. dispersiven Anteils (Realteil) der weit entfernten Resonanz

χ_{uv}

$(\omega_e - \omega_n) \gg \gamma, \omega$

$$\chi_{uv} = \frac{n_0}{\varepsilon_0} \sum_{e,n} \frac{|d_{en}|^2 (\rho_n - \rho_e)}{(\omega_e - \omega_n)}$$



→ das Wirtsgittermaterial zeigt sich als „fast" Konstante $Re(\chi) = \chi_{uv}$

$$n^2(\omega) = 1 + \chi = 1 + \chi_{uv} + \chi_{res}(\omega)$$

schwache Abhängigkeit von ω

Zweiniveausystem

$$n(\omega) \approx \underbrace{(1+\chi_{uv})^{1/2}}_{n_{uv}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_{res}}{1+\chi_{uv}}\right)$$

$$= n_{uv} + \frac{1}{2} \frac{\chi_{res}}{n_{uv}}$$

wenn $\chi_{uv} \gg \chi_{res}$ muß getestet werden

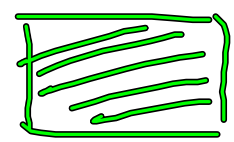
4.3. Lineare Antwort v. Elektronenflüssigkeit (Metallelektronen, Plasma)

$$\vec{j} = \vec{v}(\vec{r},t)\, n(\vec{r},t)$$

$$\dot{\vec{v}} = -\gamma \vec{v} \underbrace{- \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v}}_{\text{nichtlinearer Term (NLO)}} + \frac{q}{m}\vec{E}(\vec{r},t)$$

$\Downarrow$ in linearer Optik:

$$\dot{\vec{v}} + \gamma\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$$



n darf nicht von $\vec{E}$ abhängen

und wird zu Beginn als räumlich konstant angenommen

$$\vec{j}(\vec{r},\omega) = \vec{v}(\vec{r},\omega)\, n$$

$$-i\omega\vec{v}(\omega) + \gamma\vec{v}(\omega) = \frac{q}{m}\vec{E}(\omega)$$

$$\vec{j}(\omega) = \frac{q}{m}\frac{n}{(-i\omega+\gamma)}\vec{E}(\omega) = \sigma(\omega)\vec{E}(\omega)$$

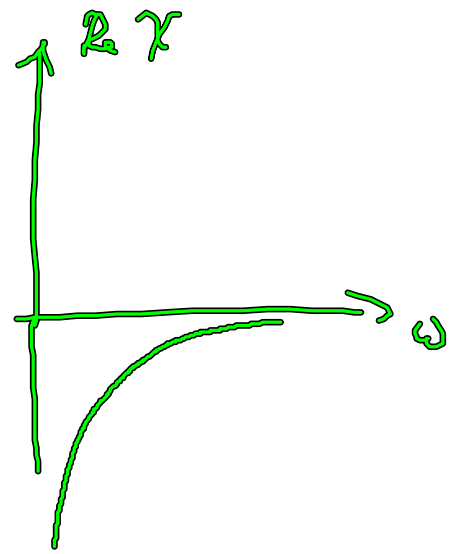
$$\sigma(\omega) = \frac{q}{m} \frac{n_0}{(-i\omega+\gamma)}$$ Leitfähigkeit d. Elektronenflüssigkeit

$$\rightarrow \chi = \frac{q}{\varepsilon_0 m} \frac{n}{-i\omega(-i\omega+\gamma)} = \frac{\omega_{pl}^2}{-i\omega(-i\omega+\gamma)}, \qquad \omega_{pl}^2 = \frac{n q}{\varepsilon_0 m}$$ Plasmafrequenz

Suszeptibilität Elektronenflüssigkeit ≙ Drudemodell

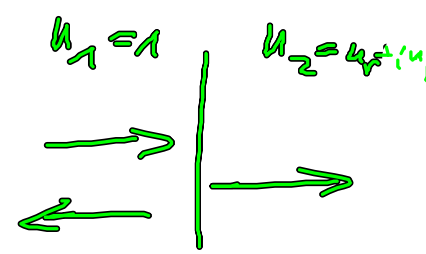
$$n^2 = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}$$

$\gamma \to 0$



4.4. Anwendung: Lineare Antwort an Grenzflächen

4.4.1. Ebene Welle an Grenzfläche



Ergebnis: Fresnelformeln (⊥ Einfall)

Transmission $$T = \left| \frac{2 n_1}{(n_1+n_2)} \frac{e^{i k_2(\omega) z}}{e^{i k_1(\omega) z}} \right|^2 = \frac{\text{transmittiert}}{\text{einfallend}}$$

$$\underbrace{= \frac{4}{(1+n_r)^2 + n_i^2}\, e^{-2 k_i(\omega) z}}_{\text{Lambert-Beersches Gesetz f. Absorption}}$$

$$k_i(\omega) = \mathrm{Im}(k_2(\omega))$$

$$k_i(\omega) = \mathrm{Im}\left(\frac{n(\omega)\,\omega}{c}\right)$$

$$R = \left| \frac{(n_1 - n_2)\, e^{-i k_1(\omega) z}}{(n_1 + n_2)\, e^{i k_1(\omega) z}} \right|^2 = \frac{\text{reflektiert}}{\text{einfallend}}$$

$$= \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| = \left| \frac{1 - n_2}{1 + n_2} \right| = \frac{(1-n_r)^2 + n_i^2}{(1+n_r)^2 + n_i^2}$$

$n_r, n_i\ (\omega)$

4.4.2 Eindringtiefe

$\left(e^{-\kappa z} \right.$

$$\kappa = 2 n_i \frac{\omega}{c} = \begin{cases} \text{Dielektrikum:} \; 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\mathrm{Im}\,\chi_{res}}{n_{0r}} \frac{\omega}{c} \\ \text{Elektronenflüssigkeit:} \; \frac{2}{c} \left(\omega_{pe}^2 - \omega^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

κ: inverse Eindringtiefe

($\omega < \omega_{pe}$, sonst 0)

Dielektrikum: der Imaginärteil der Suszeptibilität bestimmt die Absorptionslänge κ^{-1}

Elektronenflüssigkeit: $n = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_{pe}^2\right)^{1/2}$

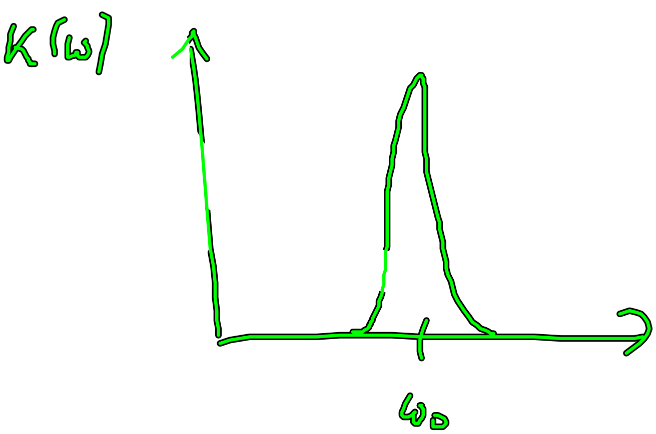
$(\gamma \to 0)$

$\to \omega < \omega_{pe} \to n_i \neq 0$

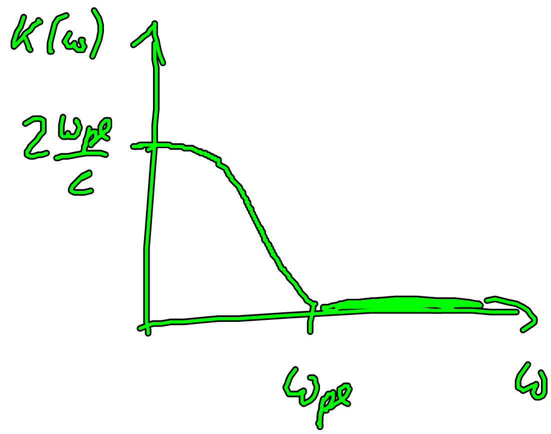
Metallkante

$\omega > \omega_{pe} \to n_i = 0$

Dielektrikum



Elektronenflüssigkeit



Absorption folgt einer Lorentz-Linie, die Breite der Linie ist γ und wird durch die Verluste bestimmt (Dipolenergie → Umgeb.)

es entsteht eine endliche Eindringtiefe dadurch, dass eine Plasmaschwing. mit ω_{pe} angeregt, und Licht kann nicht weiter eindringen ($\omega < \omega_{pe}$)

4.4.3. Reflexion

Abhäng. d. Verhaltens

a) Dielektrika:

$$n = \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma 2}\right)^{1/2}$$

des Zweiniveausystems

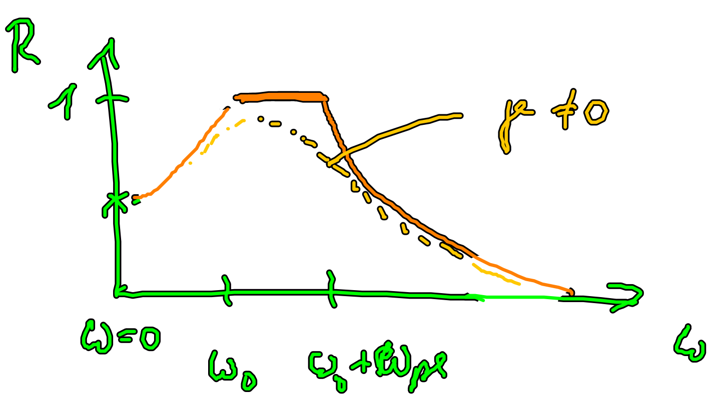
$$R = \left|\frac{1-n}{1+n}\right|^2$$

$\omega \to 0$: $\quad n \to \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}$

$\omega \to \infty$: $\quad n \to 1$

$\gamma \to 0$: wenn $\omega^2 - \omega_0^2 < \omega_{pe}^2$ dann n rein imaginär

$$R = \frac{1^2 + n_i^2}{1^2 + n_i^2} = \underline{\underline{1}}$$



Reststrahlbande:

in diesem Bereich gibt es keine Ausbreitg. von Licht im Material, wird komplett reflektiert

b) Elektr. flüssigkeit

$$n = \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{-\omega^2 - i\omega\gamma}\right)^{1/2}$$

analoge Formel wie a) $\omega_0 \to 0$