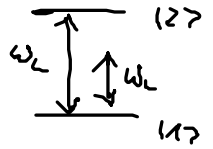


5. Nichtlineare Antwort

verschiedene Umkehrstellungen mögl., weil weiche Feld:



- a) resonante Wechselwirkung. Trägerfrequenz d. Lichts $\omega_L \approx \Delta\omega_{atomer} \approx \omega_{2,1}$
 nichtresonante Wechselwirkung. — " — $\omega_L \neq \Delta\omega_{atomer} \approx \omega_{2,1}$

- b) Dielektrika (Atome, Moleküle, HL ...) \rightarrow einzelnen Niveaus
 Elektronenflüssigkeit (Metalle, Plasmen ...) \rightarrow Kontinuum an Niveaus

Gauzonen!

- c) Störungstheorie in Feld $\vec{p} = \sum \alpha_n \vec{E}^n$
 nichtstörungsmechanisch $\vec{p} = \vec{p}(\vec{E})$ als geschlossenes Feld.

Ziel: Formulierung der Dipolmomentdichte als Fkt. des E-Felds (nichtlinear)
 + Lichtausbreitung über Wellengleichung

- Reihenfolge
- Niveausystem (Atome)
 - Zwei Niveaus, Drei Niveaus, Viel Niveaus \rightarrow Resonanz
 - \rightarrow Nichtresonanz
 - Elektronenflüssigkeit \rightarrow Resonanz
 - \rightarrow Nichtresonanz

5.1. Nichtlinearitäten von Niveausystemen

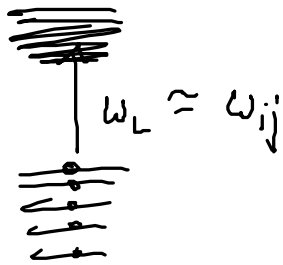
$$\vec{P} = \vec{P}(\rho_{ij})$$

$$\dot{\rho}_{ij} = i\omega_{ij}\rho_{ij} - i\sum_m (\Omega_{im}^* \rho_{mj} - \Omega_{jm} \rho_{im})$$

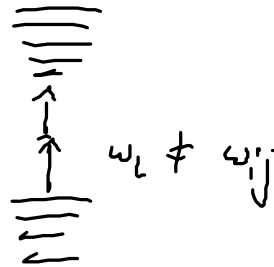
Rabi frequenz

$$\Omega_{im} = \frac{\vec{E}(t) \cdot \vec{d}_{im}}{\hbar}$$

resonant



nicht resonant



und dem E-Feld:

→ es liegen "edle"
Elektron besetzt, $\rho_{oben} \neq 0$ vor

→ liegen keine
Elektron besetzt vor,
es sind dem E-Erhaltg.
wird durch untere Photen wieder hergestellt

5.1.1. Resonante Nichtlinearitäten

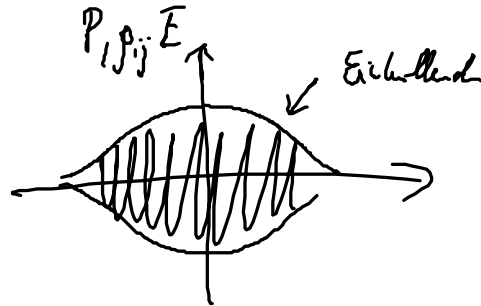
Rotating Wave Approximation (RWA) - Drehwelle Näherung

$$p_{ij} = \tilde{p}_{ij}(t) e^{i\omega_{ij} t} \rightarrow \tilde{p}_{ij}(t) e^{-i\omega_L t} \quad \text{f. } \omega_{ij} < 0$$

↗ l.d. DM gleiche liegt dies Frage 2 vor

langsamer Amplitude, Theorie hier für ist im optisch Beil

ausreichend:



viele Oszillation unter
des Einkommend

RWA: a) $\omega_{ij} \approx \omega_L$

Voraussetz. b) $\Omega, \Gamma, \gamma \ll \omega_{ij}$
Pulsdauer $\tau^{-1} \ll \omega_{ij}$

↙ Quellterm: nicht an

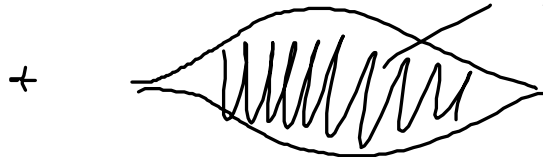
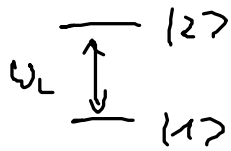
$$\dot{p}_{ij} = i\omega_{ij} p_{ij} + X(t), \quad \text{einsetzen:}$$

$$\dot{\tilde{p}}_{ij}(t) = \underbrace{i(\omega_{ij} + \omega_L)}_{\approx 0} \tilde{p}_{ij}(t) + \underbrace{X(t) e^{i\omega_L t}}_{\text{langsam, soll kein}}$$

$\omega_{ij} < 0$
 Schwache Frequenz
 induziert
 $\delta_{ij} \hat{=} \text{Detuning}$
 Verkümpf.

Optimal Frequenz ertheben
 $\tilde{X} e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t}$
 ↑
 mitgenommen wenn langsam
 $\tilde{X} e^{+i\omega_1 t} e^{+i\omega_2 t} \rightarrow e^{2i\omega_1 t}$
 $\rho_{ij} \sim \int dt' e^{2i\omega_1 t'}$ langsam
 Klein Richtig, in Welt sind
 raus

5.11.1. Zweiniveausystem



am Ort d. Dipols
 $E(t) = \tilde{E}(t) \cos(\omega_L t)$

Ansatz

$\Omega_{ii} = 0$ dh. kein permanent Dipolmoment

dazuferbricht

$$\dot{\rho}_{12} = i\omega_{12} \rho_{12} - i(\Omega_{12}^* \rho_{22} - \Omega_{21} \rho_{11}) - \Gamma \rho_{12}$$

$$\dot{\rho}_{11} = -i(\Omega_{12}^* \rho_{12} - \Omega_{12} \rho_{22}) - \Gamma(\rho_{11} - \rho_{11}^0)$$

$$\dot{\rho}_{22} = + \dots - \Gamma(\rho_{22} - \rho_{22}^0)$$

Anwendung der RWA

$$p_{12} = \tilde{p}_{12}(t) e^{-i\omega_L t}$$

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{12}(t) e^{i\omega_L t} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{12}^*(t) e^{-i\omega_L t}$$

↑

komplex, wird später dafür Wellengleich. aufgeschrieben
(komplexe Wellengleich.)

$$\dot{\tilde{p}}_{12} = \underbrace{i(\omega_{12} + \omega_L)}_{\delta_{12}} \tilde{p}_{12} - i \left\{ \left(\frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{12}^* e^{-i\omega_L t} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{12} e^{+i\omega_L t} \right) p_{22} e^{i\omega_L t} - \left(\frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{21}(t) e^{-i\omega_L t} + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{21} e^{i\omega_L t} \right) p_{11} e^{i\omega_L t} \right\}$$

mitnehmen
 $e^{2i\omega_L t} \rightarrow$ vernachlässigen

$$\dot{\tilde{p}}_{12} = i \delta_{12} \tilde{p}_{12} - \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{21} (p_{11} - p_{22}) - p_{22} \tilde{\Omega}_{12}$$

laufen an Eikonalgleichg. f. die Übergangsamplitude

analog: Besetzung: $p_{11}, p_{22} \rightarrow$ von sich lsg Größe, denn $\omega_{11}, \omega_{22} = 0$

\rightarrow auf rechte Seite: w langsam Amplitude

$$\dot{p}_{11} = -\frac{i}{2} (\tilde{\Omega}_{21} \tilde{p}_{22} - \tilde{\Omega}_{12} \tilde{p}_{11}) - \tilde{\Omega}_{12} (p_{11} - p_{22})$$

$$\dot{\rho}_{22} = +\frac{i}{2} \overbrace{\quad\quad\quad} - \Uparrow (\rho_{22} - \rho_{22}^0)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_{11} = - \frac{d}{dt} \rho_{22}, \text{ wenn } \Uparrow \rightarrow 0$$

$$\Downarrow \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \rightarrow \rho_{11} (\rho_{22})$$

a) Ultra kurzzeit regime

$$\Uparrow \ll \mu^{-1}, \Uparrow^{-1}$$

↑
Pulsdauer extrem kurz gegen alle Materialkonstanten

b) Relaxations regime

$$\Uparrow \gg \mu^{-1}$$

$$\mu \gg \Uparrow$$

$$\Uparrow \ll \Uparrow^{-1}$$

Pulsdauer lang gegen Debyezeit

Phase zerfallsprozesse
in ρ_{11} sind immer
effektiver als Elektron-
transfer u. Beschlg.

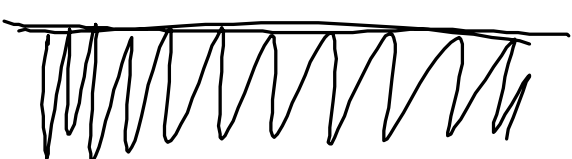
Falls $\Uparrow = 0$, $\mu \neq 0 \rightarrow$ „pure dephasing“

„reine Debyezeit“

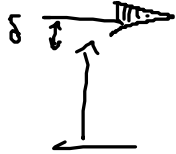
c) stationäres Regime

$$\Uparrow \gg \mu^{-1}, \Uparrow^{-1}$$

Selbst langs Puls, bzw. Kontinuierl. Puls

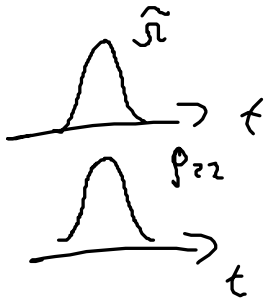
 $\tilde{\Omega} = \text{Kont}$

d) Verstärkung - adiabatisch Folgeregime

$\delta \neq 0$  $\delta \gg \rho_1, \tau, \tau^{-1}$

Dynamik Level d. Anfuhrer d. Pulses verschleiert

$\rho_{12}, \rho_{22} \rightarrow \sim E, E^2$



a) Ultrakurzzeitregime

$\delta_{12} = 0$, keine Relaxation $\rho_1 \uparrow \rightarrow 0$

// $\dot{\rho}_{12} = + \frac{i}{2} \underbrace{\hat{\sigma}_{21}}_{\Delta} (\rho_{11} - \rho_{22})$

Δ Inversion (Beschleunigungsdifferenz)

// $\underbrace{(\rho_{11} - \rho_{22})}_{\Delta} = -i (\hat{\sigma}_{21} \tilde{\rho}_{21} - \hat{\sigma}_{12} \hat{\rho}_{11})$

Δ

reelles Feld angenommen $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_i$

Auswahl: $p_{12} = i p$

Amplitude $\dot{p} = \frac{i}{2} \tilde{\Omega} \Delta$, Inversion $\dot{\Delta} = -i \tilde{\Omega} (-2ip) = -2\tilde{\Omega} p$

$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}(t)$ Puls!

neue Koordinate: $\Theta = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Omega}(t') = \Theta(t)$, $\dot{\Theta} = \tilde{\Omega}(t)$

$\left(\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \right)$

$p' = \frac{1}{2} \Delta$, $\Delta' = -2p$ " : ∂_{Θ}

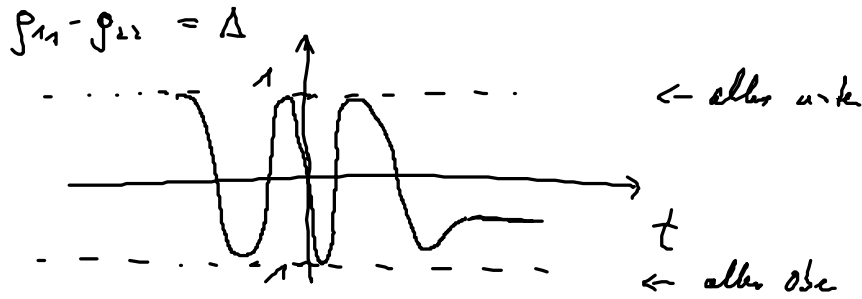
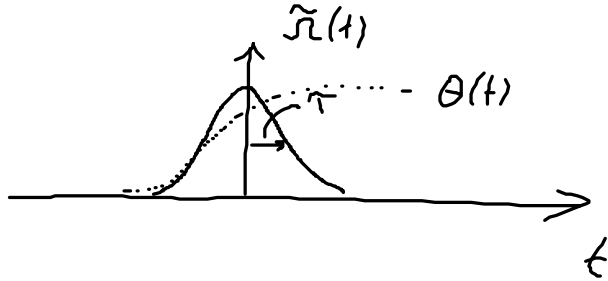
$\Delta'' = -2p' = -\Delta$

zu Hilfe: $\Delta'' = -\Delta \rightarrow \Delta = \cos \left(\Theta = \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Omega}(t') \right)$

$\Delta(t=-\infty) = 1$

$p_{12} = \frac{i}{2} \sin \left(\int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Omega}(t') \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \Omega} \Omega \sim \sin \left(\int_{-\infty}^t \Omega(t') dt' \right)$

nichtlinear!



Rabi-Oszillation: aufgrund d. (Fermioncharakter) des Elektronen:

bestimmt man $p_{11}, p_{22} : [0, 1]$

→ Wechselspiel v. induzierter Absorption und Emission
 (letztes Feld läuft vor)

wacht Sinn wegen d. Kosinus v. $\theta = 0\pi, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\pi$ Punkte zusammen

$$\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \tilde{\Omega}(t')$$

Pulsflächen

$$\frac{\pi}{2} - \text{Puls} : \Delta = 1 \rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow p_{11} = p_{22} \overset{= \frac{1}{2}}{\text{fluctuierend}}$$

$$\pi - \text{Puls} : \Delta = 1 \rightarrow \Delta = -1 \Rightarrow \text{alles nach oben} \\ p_{22} = 1$$

$$2\pi - \text{Puls} : \Delta = -1 \rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow \text{in voller Zyklen}$$

b) Rategleichungen: Sättigungseffekte

$$\delta_{12} = 0, \quad \mu \gg \tilde{\Omega}, \quad \partial_t \rho_{12} \ll \mu$$

↑
Phasenrelaxation
Abklingen von \tilde{P}_1, \tilde{P}_2

~~$$\dot{\rho}_{12} + \mu \rho_{12} = \frac{i}{2} \tilde{\Omega}_{21} \Delta$$~~

$$\rho_{12} = \frac{i}{2} \frac{\tilde{\Omega}_{21} \Delta}{\mu}$$

stationäre Lösung

$$\dot{\Delta} = -\frac{i}{2} (\tilde{\Omega}_{21} \tilde{P}_{21} - \tilde{\Omega}_{12} \tilde{P}_{12}) = -\frac{1}{2} \frac{|\tilde{\Omega}|^2}{\mu} \Delta$$

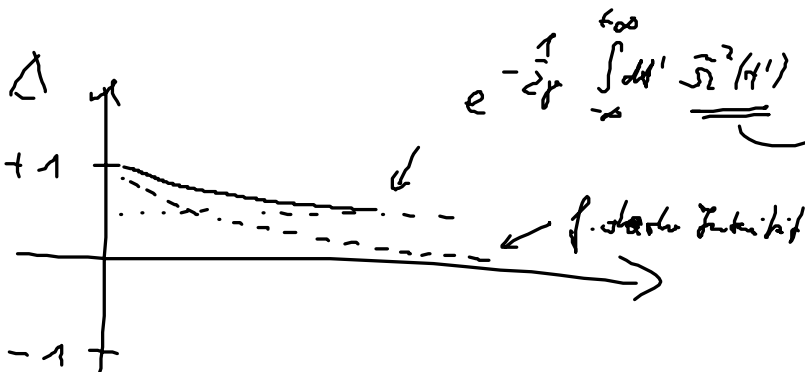
einsetzen

$$\Delta = \exp\left(-\frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Omega}^2(t')\right)$$

Die Dipoldichte folgt der Feld $\rho_{12} \sim \Omega \Delta$ (vorhin a)
 $\rho_{12} \sim \sin \int dt' \Omega(t')$

Die Inversion wird gesättigt:

↑
Feld



$e^{-\frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\Omega}^2(t')}$ → Amplitude ist proportional zu Energie

$$\int dt' \tilde{\Omega}^2(t') = \int dt' |\tilde{\Omega}(t')|^2$$

↑
Inkohärenz

man kann die ZNS nicht in diese

Lösung umsetzen, da maximal

Erreichte ist $\Delta = 0$, also flachbeweg.

Sättigung: System kann nicht in eine Zustand $\Delta < 0$ gebracht werden

für Vektor:
$$p_{12} = \frac{i}{2} \frac{\Omega_{21}}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_{-\infty}^t dt' (|\tilde{\Omega}_{21}(t')|^2)}$$

c) stationäres Regime

$\dot{p}_{12} = 0, \dot{\Delta} = 0$ sind die stationäre Lösung

$$\partial_t \ll \Gamma, \gamma$$

stationär
$$p_{12} = \frac{i}{2} \frac{\Omega_{21} \Delta}{\gamma} \quad \uparrow (\Delta - \Delta_0) = -\frac{1}{2} |\Omega_{21}|^2 \frac{\Delta}{\gamma}$$

hat Δ umstellen, in p_{12} einsetzen

$$\rightarrow \Delta = \frac{\Delta_0}{(1 + |\tilde{\Omega}_{21}|^2 / 2\gamma\Gamma)}$$

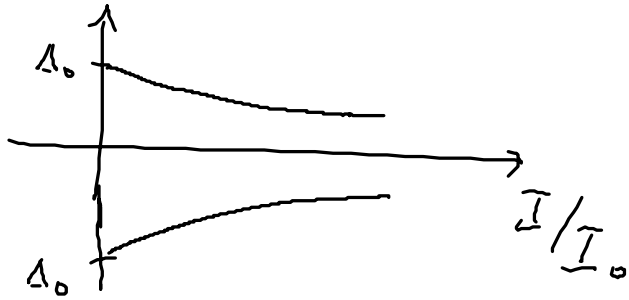
$$p_{12} = \frac{i}{2\gamma} \Omega_{21} \frac{\Delta_0}{(1 + |\Omega_{21}|^2 / 2\gamma\Gamma)}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|\Omega_{21}|^2}{2\gamma\Gamma}$$

mittleres Δ

I_0 : Sättigungintensität = $2\gamma\Gamma$

Δ



durch die Null der Intensität kann man die Inversion
 in ZNS einstellen, Feststell findet dann
 ein verminderte / erhöhte Inversion.