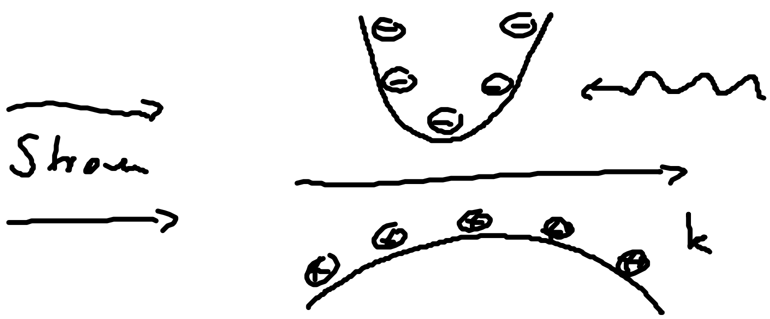
VI. WW des quantisierten Strahlungsfeldes mit Materie – Aspekte schwacher Kopplung

6.1 Einführungsbsp. – spont. Emission

- Model: 2 Band HL, Strom prod. e^-/h^+-Verteilung



Rekombination von e^- und h^+:

(a) stimulierte Emission / Absorption (klass. Feld)

→ Test des Systems durch ext. Feld

(b) Spontane Emission

kein ext. Feld im System, d.h. Interbandkohärenz

$\rho_{12}^{h}(t=0) = 0$ und auch nicht getrieben, da $\Omega_{12} = 0 = \frac{E \cdot d_{12}}{\hbar}$

- Frage: was passiert mit e^- u h^+? → immer NGG?

→ nach semiklass. Theorie ja

→ Spont. Emission nur mit q'sierten Lichtfeld

WW von q'sierter Materie mit q'sierten Strahlungsfeld heißt Quanten Elektrodynamik (QED)

6.2 Das freie q'sierte Strahlungsfeld

$$H_0 = \sum_{q\sigma} \hbar\omega_q \left(c^{+}_{q\sigma} c_{q\sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

Photonen Erz./Vern. für Mode q mit Polarisation σ

- E-Feld in q'sierter Form:

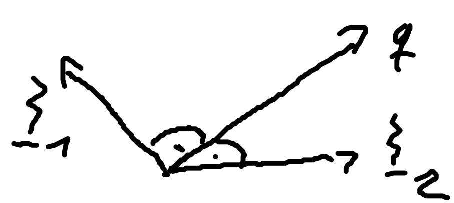
$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}^{+}(\underline{r},t) + \underline{E}^{-}(\underline{r},t)$$

$$= \sum_{q\sigma} \mathcal{E}_q \, \underline{\xi}_{q,\sigma} \, c_{q\sigma} \, e^{i q\cdot \underline{r}} + \text{h.a.}$$

Pol.vektor

Vakuumfeldamplitude: $\mathcal{E}_q = \sqrt{\dfrac{\hbar\omega_q}{2\varepsilon_0 V}}$

Pol. vektor: $\underline{\xi}_{q,\sigma}$



- Zustandsdichte des Photonenfeldes:

Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Moden

$$\sum_{\vec{q},\sigma} \longrightarrow 2\sum_{\vec{q}}\frac{\Delta q}{\Delta q} = 2\,\frac{1}{\Delta q}\underbrace{\sum_{\vec{q}}\Delta q}_{\text{Grenzwert Integral}} \qquad \text{mit } \Delta q = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$$

$$= 2\,\frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3q$$

Wieviele Mode im Frequenzintervall $\omega, \omega+d\omega$

$$\int d^3q \overset{\text{KK}}{=} \int_0^\infty dq\, q^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta\, \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi\int_0^\infty dq\, q^2$$

Übergang von Wellenzahl zu Frequenzen: $\omega_q = c\cdot q$

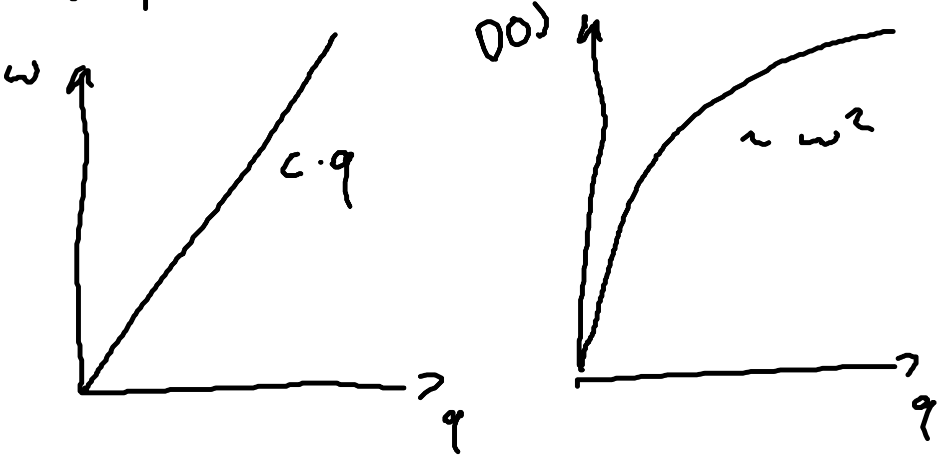
$$\longrightarrow \quad dq = \frac{1}{c}\, d\omega$$

$$\int d^3q = \frac{4\pi}{c^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^2$$

Vakuum Zustandsdichte („density of states" DOS):

$$\sum_{\vec{q},\sigma} = \int_0^\infty d\omega\, \mathcal{D}_{\text{vac}}(\omega) \qquad \mathcal{D}_{\text{vac}}(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$$

· Dispersionsrel.:



6.3 WW von El. mit q'sierten Strahlungsfeld

$$H_{el-pt} = - \int d^3r \, \Psi^{+}(\underline{r},t) \underbrace{\left[e_0 \underline{r} \cdot \underline{E} \right]}_{\text{klass. Dipol WW}} \Psi(\underline{r},t)$$

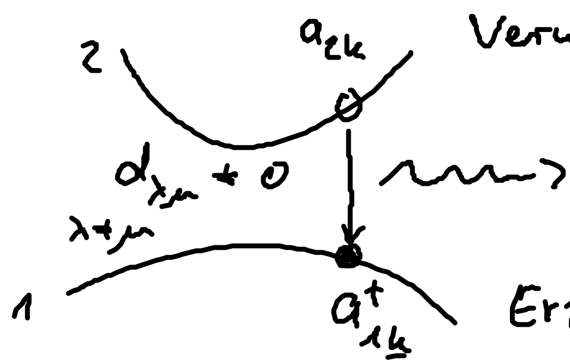
→ Ψ als Quantenfeld einsetzen $\Psi(\underline{r},t) = \sum_n \varphi_n a_n$

→ $\underline{E}$ ——— " ——— $\underline{E} = \sum_{q\sigma} \varepsilon_q \underline{\xi}_{q\sigma} c_{q\sigma} e^{iqr} + h.a.$

$$H_{el-pt} = \hbar \sum_{\lambda\mu\underline{k}} \sum_{q\sigma} M^{k,q}_{\lambda\mu} \, a^{+}_{\lambda\underline{k}} a_{\mu\underline{k}} (c_{q\sigma} + c^{+}_{q\sigma})$$

- Kopplungselement: $M^{k,q}_{\lambda\mu} = \frac{1}{\hbar} \varepsilon_q \underline{d}^{k}_{\lambda\mu} \cdot \underline{\xi}_{q\sigma}$
- Dipolmatrixelement: $\underline{d}^{k}_{\lambda\mu} = \int d^3r \, \varphi^{*}_{\lambda\underline{k}}(\underline{r}) [e_0 \underline{r}] \varphi_{\mu\underline{k}}(\underline{r})$
- Auswahlregeln: $\underline{d}_{12} = \underline{d}_{21} \neq 0$, $d_{11} = d_{22} = 0$
- Interpretation:

El werden zwischen den Bändern gestreut $\lambda \neq \mu$



Vernichtung von e^-

c^{+}_q unter Emission von Phot

(Photonimpuls vernachlässigt)

Erzeugung von e^-

Berechnung der Photonenzahl mittels HBBGl für

$$\langle c^{+}_{q\sigma} c_{q\sigma} \rangle = n_q$$

$$-i\hbar\,\partial_t \langle c^+_{q\sigma} c_{q\sigma}\rangle = -\hbar\,\mathcal{E}_q \langle c_{q\sigma} P^+\rangle + \hbar\,\mathcal{E}_q \langle c^+_{q\sigma} P\rangle$$

qm. Dipoldichte: $P = \sum_k d^k_{12}\, a^+_{1k} a_{2k} + d^k_{21}\, a^+_{2k} a_{1k}$

→ Änderung der Photonzahl wird durch alle mögl. Übergänge zw el. Niveaus die ein Photon erzeugen/vernichten getrieben.

→ $\langle c P^+\rangle$ ist verallgem. Dipoldichte, wobei Photon im EW einbezogen ist (im Gegensatz zu klass. Feld)

- Berechnung der Übergänge:

$$-i\hbar\,\partial_t \langle c^+_{q\sigma} a^+_{1\underline{k}} a_{2\underline{k}}\rangle = (\varepsilon_{2\underline{k}} - \varepsilon_{1\underline{k}} - \hbar\omega_q)\langle c^+_{q\sigma} a^+_{1\underline{k}} a_{2\underline{k}}\rangle$$

$$-(\rho^k_{11} - \rho^k_{22})\cdot \gamma_{stim}$$ → stimulierte Emission

$\gamma_{stim} = f(\langle c^+ c\rangle)$ Photonzahl

$$+\underset{\sim}{\rho^k_{22}}\cdot \underline{(1-\rho^k_{11})}\cdot \gamma_{spon}$$ → spont. Emission

$\gamma_{spon} = \mathcal{E}_q\, d_{12}$

→ spont. Emission ist prop. zu Produkt aus der „Besetzung des Ausgangszustands“ (~) mal „Nicht-Besetzung des Endzustands“ (—), fragt ab wieviele El und Löcher simultan zur Rekombination zur Verfügung stehen

- Einstein-Koeffizienten im Vakuum:

$$\partial_t \rho_{22} \propto \langle c^+ P \rangle + \langle c P^+ \rangle$$

→ kann aus obiger Gl. gewonnen werden, dazu

(1) formal integrieren

(2) Rotating-Wave-Approximation

$\langle a_1^+ a_2 c^+ \rangle$ ja

$\langle a_1^+ a_2 c \rangle$ nein

(3) Born-Approx. + Trennung v. el. u. phot. EW

$$\langle a_1^+ a_2 c_q^+ c_{q'} \rangle \approx \langle a_1^+ a_2 \rangle \underbrace{\langle c_q^+ c_q \rangle}_{} \delta_{q,q'}$$

Bad-Annahme $\quad n_q = \dfrac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_q}{kT}} - 1}$ Bose-Einstein Verteilung

(4) Markov-Approx.

keine Gedächtniseffekte, da da nur Emission interessant (keine Reabsorption)

$$\partial_t \rho_{22} = -\Gamma_{vac} \left(\rho_{22} (n_q + \underbrace{1}_{\text{spont. Emission}}) - \rho_{11} n_q \right)$$

mit $\boxed{\Gamma_{vac} = \dfrac{\omega_0^3 |d_{12}|^2}{3\pi c^3 \varepsilon_0 \hbar} \quad \text{Einsteinkoeff.}}$

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar}$$

· Fermis - Goldene - Regel :

Vakuum-feldampl.

$$W_{1\to 2} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \underbrace{\langle 1 | H_{ww} | 2 \rangle} \right|^2 \cdot \mathcal{D}_{vac}(\omega)$$

$$|\langle e_0 \underline{r} \cdot \underline{E} \rangle|^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{\hbar} |d_{12}|^2 \mathcal{E}_q^2$$

Mittelung über alle Raumrichtung

$\langle 1 | e_0 r | 2 \rangle$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{3\hbar} d_{12}^2 \cdot \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \cdot \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} = \frac{\omega_0^3 |d_{12}|^2}{3\pi c^3 \varepsilon_0 \hbar}$$

mittels DOS:

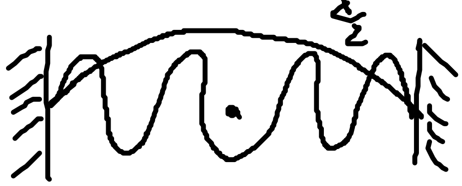
$$\Gamma_{vac} = \frac{d_{12}^2 \pi}{3\varepsilon_0 \hbar} \frac{\omega_0}{V} \mathcal{D}_{vac}(\omega_0) \Rightarrow \boxed{\Gamma_{vac} \propto \frac{\omega_0}{V} \mathcal{D}_{vac}(\omega_0)}$$

⟶ DOS ist maßgeblicher Faktor für Zerfallsrate

6.4 Resonatoren

Modenstruktur des Vakuums kann durch Resonatoren geändert werden.

· Fabry-Pérot-Resonator : reflektierende Spiegel



- größt mögl. Wellenlänge

$\lambda_c = 2L$ „cut-off"

⟵ L ⟶

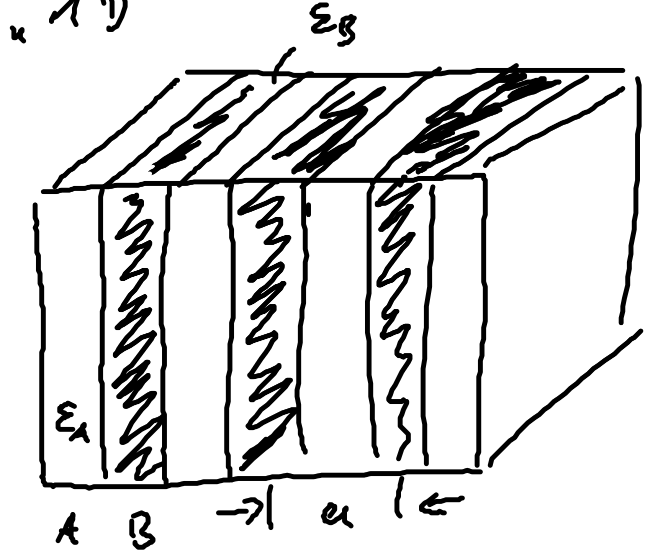
Wenn $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} > \lambda_c$

dann wird spont. Emission unterdrückt

- Photonische Kristalle:

  Regelmässige Anordnung von 2 Dielektrika mit unterschiedl. Brechzahlen n

„1D“

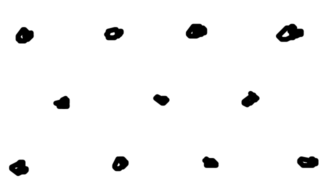


⟶ period. dielektrische Funktion

$$\varepsilon(\underline{r}) = \varepsilon(\underline{r} + \underline{a})$$

$a \simeq \mu m$ als Vgl. $a_{Atom} \approx Å$

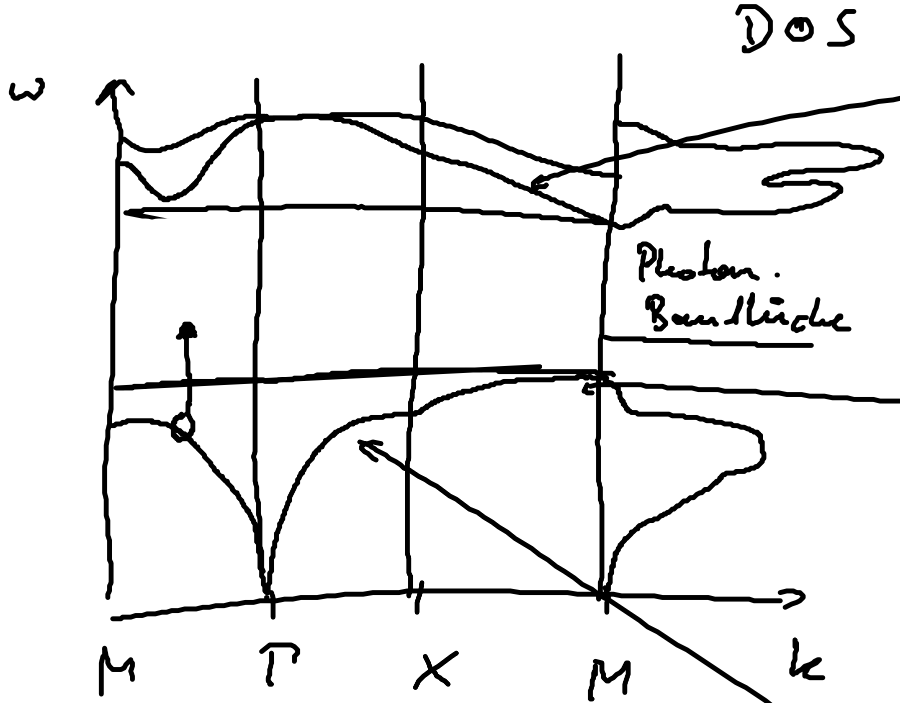
„2D“



Löcher im Silizium-wafer

- Bandstruktur, analog zum FK:

$$\frac{c^2}{\varepsilon(\underline{r})}(\nabla \times \nabla \times \underline{E}_{\underline{k},n}) = \omega_n^2(k)\, \underline{E}_{\underline{k},n}$$

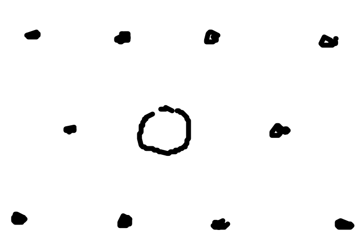


neg. Steigung: neg. Brechung

$\frac{d\omega}{dk} \to 0$ „slow light"
(DFB Laser)

starke Krümmung
Superprisma

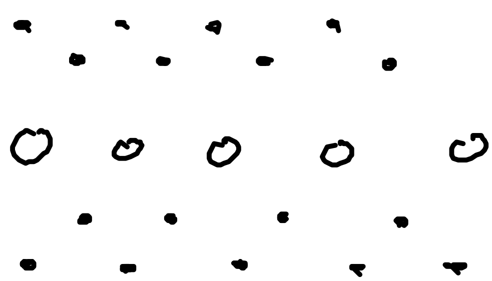
• Cavity als Punktdefekt in Phot. Kristall:



- schiebt einzelne Mode von Bandkante in die Bandlücke
- Lichtfeld lokalisiert am Defekt

$$\underline{E}_c = \sqrt{\frac{1}{V}}\,\underline{e}_c(\underline{r})$$

• Wellenleiter als Liniendefekte:



Defektband

$$\underline{E}_{WG} = \sqrt{\frac{a}{L_{WG}}}\, e^{ikx}\, \underline{e}_{WG}(r)$$

$$\left[\nabla\times\nabla\times - \frac{\omega_n^2}{c^2}\varepsilon(\underline{r})\right]\underline{E}(r) = 0$$