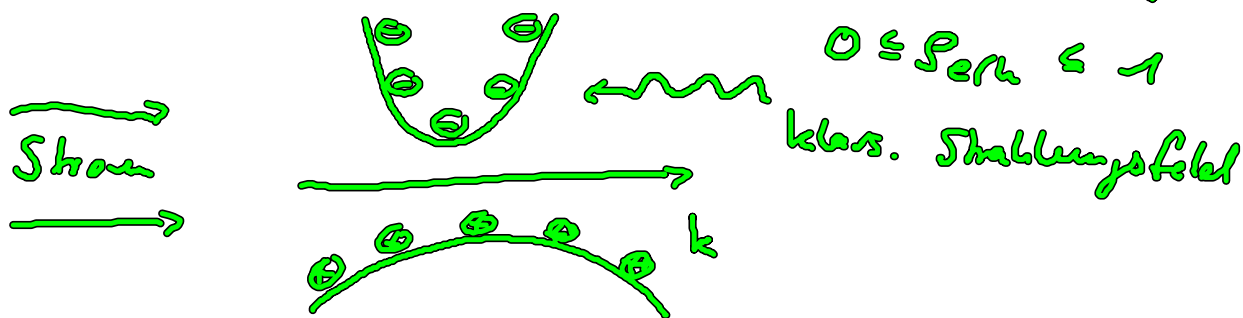


VI. WW des quantisierten Strahlungsfeldes mit Materie - Aspekte schwacher Kopplung

6.1 Einführungsbsp. - spont. Emission

- Model: 2 Band HL, Strom prod. e^-/h^+ -Verteilung



Rekombination von e^- und h^+ :

- (a) stimulierte Emission / Absorption (klass. Feld)
→ Test des Systems durch ext. Feld

(b) Spontane Emission

kein ext. Feld im System, d.h. Interbandkohärenz

$$S_{12}^h(t=0) = 0 \text{ und auch nicht geübt, da } \Omega_{12} = 0 = \frac{E \cdot d \cdot \pi}{\hbar}$$

- Frage! was passiert mit e^- u h^+ ? → immer NGG?
→ nach semi-klass. Theorie ja
→ spont. Emission nur mit q'sterten Lichtfeld

WW von q 'sterker Materie mit q 'sterkem Strahlungsfeld
 heißt Quanten Elektrodynamik (QED)

6.2 Das freie q 'sterke Strahlungsfeld

$$H_0 = \sum_{\mathbf{q}, \sigma} \hbar \omega_{\mathbf{q}} \left(c_{\mathbf{q}, \sigma}^\dagger c_{\mathbf{q}, \sigma} + \frac{1}{2} \right)$$

Photonen Erz./Vern.
 für Mode \mathbf{q} mit
 Polarisation σ

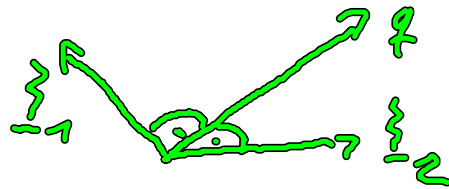
• E-Feld in q 'sterker Form:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}^+(\underline{r}, t) + \underline{E}^-(\underline{r}, t)$$

$$= \sum_{\mathbf{q}, \sigma} \epsilon_{\mathbf{q}} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pol.vektor}}}{\hat{e}_{\mathbf{q}, \sigma}} c_{\mathbf{q}, \sigma} e^{i\mathbf{q} \cdot \underline{r}} + \text{h. a.} \right.$$

Vakuumfeldamplitude: $\epsilon_{\mathbf{q}} = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{q}}}{2 \epsilon_0 V}}$

Pol.vektor: $\hat{e}_{\mathbf{q}, \sigma}$



• Zustandsdichte des Photonensfeldes:

Übergang von diskreten zu kontinuierlichen Moden

$$\sum_{\mathbf{q}, \sigma} \rightarrow 2 \sum_{\mathbf{q}} \frac{\Delta q}{\Delta q} = 2 \frac{1}{\Delta q} \underbrace{\sum_{\mathbf{q}} \Delta q}_{\text{Bravais Integral}} \quad \text{mit } \Delta q = \left(\frac{\pi a}{L}\right)^3$$

$$= 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 q$$

Wieviele Mode im Frequenzintervall ω , $\omega \rightarrow d\omega$

$$\int d^3 q = \int_0^{\infty} dq q^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi} = 4\pi \int_0^{\infty} dq q^2$$

Übergang von Wellenzahl zu Frequenzen: $\omega_{\mathbf{q}} = c \cdot q$

$$\rightarrow dq = \frac{1}{c} d\omega$$

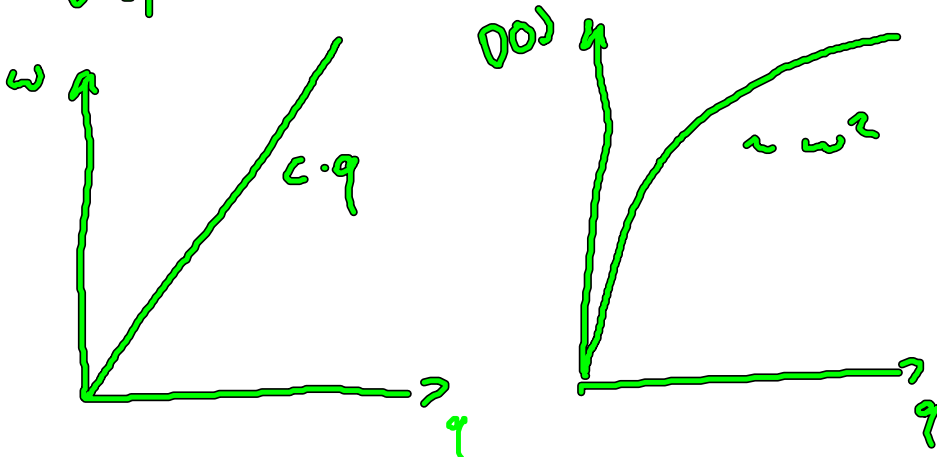
$$\int d^3 q = \frac{4\pi}{c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^2$$

Volumen Zustandsdichte
(„density of states“ DOS):

$$\sum_{\mathbf{q}, \sigma} = \int_0^{\infty} d\omega D_{\text{Vol}}(\omega)$$

$$D_{\text{Vol}}(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3}$$

• Dispersionsrel.:



6.3 WW von EL. mit q'stertem Strahlungsfeld

$$H_{el-ph} = - \int d^3r \psi^\dagger(\underline{r}, t) \underbrace{[e \cdot \underline{r} \cdot \underline{E}]}_{\text{klass. Dipol WW}} \psi(\underline{r}, t)$$

→ ψ als Quantenfeld einsetzen $\psi(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{n}} \varphi_{\underline{n}} a_{\underline{n}}$

→ \underline{E} ————— " ————— $\underline{E} = \sum_{\underline{q}, \sigma} \varepsilon_{\underline{q}} \left\{ \begin{matrix} \lambda_{\underline{q}, \sigma} c_{\underline{q}, \sigma} e^{i\underline{q} \cdot \underline{r}} \\ - \lambda_{\underline{q}, \sigma} c_{\underline{q}, \sigma}^\dagger e^{-i\underline{q} \cdot \underline{r}} \end{matrix} \right\} + h.a.$

$$H_{el-ph} = \hbar \sum_{\lambda, \mu, \underline{k}} \sum_{\underline{q}, \sigma} M_{\lambda, \mu}^{k, \underline{q}} a_{\lambda, \underline{k}}^\dagger a_{\mu, \underline{k}} (c_{\underline{q}, \sigma} + c_{\underline{q}, \sigma}^\dagger)$$

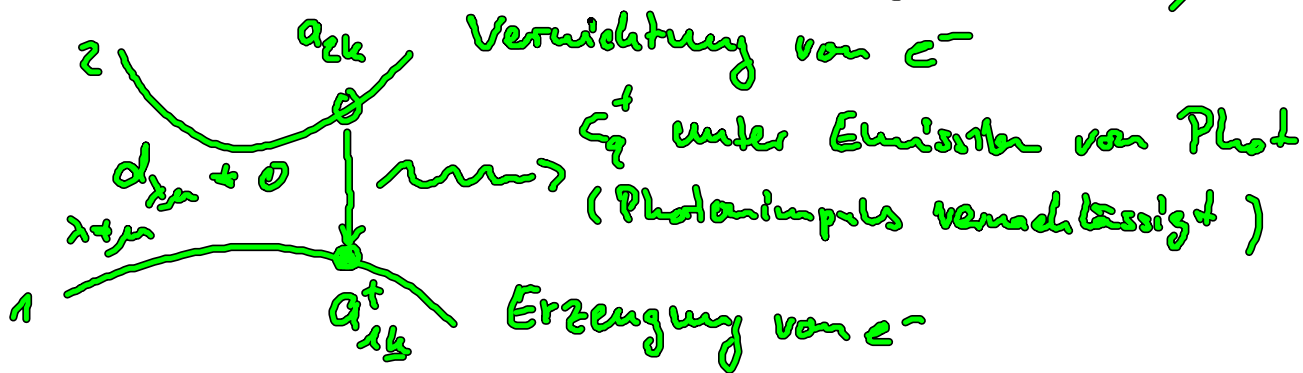
• Kopplungselement: $M_{\lambda, \mu}^{k, \underline{q}} = \frac{1}{\hbar} \varepsilon_{\underline{q}} \cdot \underline{d}_{\lambda, \mu}^{k, \underline{q}}$

• Dipolmatrixelement: $\underline{d}_{\lambda, \mu}^{k, \underline{q}} = \int d^3r \varphi_{\lambda, \underline{k}}^\dagger(\underline{r}) [e \cdot \underline{r}] \varphi_{\mu, \underline{k}}(\underline{r})$

• Auswahlregeln: $\underline{d}_{12} = \underline{d}_{21} \neq 0$, $d_{11} = d_{22} = 0$

• Interpretation:

EL werden zwischen den Bändern gestreut $\lambda \neq \mu$



Berechnung der Photonenzahl mittels HBSG (für

$$\langle c_{\underline{q}, \sigma}^\dagger c_{\underline{q}, \sigma} \rangle = n_{\underline{q}}$$

$$-i\hbar \partial_t \langle C_{q\sigma}^\dagger C_{q\sigma} \rangle = -\hbar \epsilon_q \langle C_{q\sigma} P^\dagger \rangle + \hbar \epsilon_q \langle C_{q\sigma}^\dagger P \rangle$$

gem. Dipoldichte: $P = \sum_k d_{12}^k a_{1k}^\dagger a_{2k} + d_{21}^k a_{2k}^\dagger a_{1k}$

→ Änderung der Photonenzahl wird durch alle ungl. Übergänge zw d. Niveaus die ein Photon erzeugen/vernichten getrieben.

→ $\langle C P^\dagger \rangle$ ist verallgem. Dipoldichte, wobei Photon im EW einbezogen ist (im Gegensatz zu klass. Feld)

• Berechnung der Übergänge:

$$-i\hbar \partial_t \langle C_{q\sigma}^\dagger a_{1k}^\dagger a_{2k} \rangle = (\epsilon_{2k} - \epsilon_{1k} - \hbar \epsilon_q) \langle C_{q\sigma}^\dagger a_{1k}^\dagger a_{2k} \rangle$$

$$- (S_{11}^k - S_{22}^k) \cdot \rho_{stim} \rightarrow \text{stimulierte Emission}$$

$$\rho_{stim} = f(\langle C^\dagger C \rangle)$$

Photonzahl

$$+ S_{22}^k \cdot \underbrace{(1 - S_{11}^k)}_m \cdot \rho_{spont} \rightarrow \text{spont. Emission}$$

$$\rho_{spont} = \epsilon_q d_{12}$$

→ spont. Emission ist prop. zu Produkt aus der

• Besetzung des Ausgangszustands² (m) und

• Nicht-Besetzung des Endzustands¹ (—), fragt

ab wieviele El und Löcher simultan zu Rekombination zur Verfügung stehen

• Einstein-Koeffizienten im Vakuum:

$$\partial_t P_{22} \propto \langle c^\dagger P \rangle + \langle c P^\dagger \rangle$$

→ kann aus obiger Gl. gewonnen werden, dazu

(1) formal integrieren

(2) Rotating-Wave-Approximation

$$\langle a_1^\dagger a_2 c^\dagger \rangle \text{ ja}$$

$$\langle a_1^\dagger a_2 c \rangle \text{ nein}$$

(3) Born-Approx. + Trennung v. el. u. phot. EW

$$\langle a_1^\dagger a_2 c_1^\dagger c_1 \rangle \approx \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \underbrace{\langle c_1^\dagger c_1 \rangle}_{\text{Bos-Einstein}}$$

$$n_q = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_q}{kT}} - 1} \quad \text{Verteilung}$$

(4) Markov-Approx.

keine Gedächtniseffekte, da da nur Emission
interessant (keine Reabsorption)

$$\partial_t P_{22} = -T_{\text{vac}} (P_{22} (n_q + 1) - P_{11} n_q)$$

Spont. Emission

mit

$T_{\text{vac}} = \frac{\omega_0^3 d_{21} ^2}{3\pi c^3 \epsilon_0 \hbar}$	Einkoeff.
--	-----------

$$\omega_0 = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

- Fermis - Golden - Regel:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{2\pi}{\hbar} | \langle 1 | H_{\text{int}} | 2 \rangle |^2 \rho_{\text{me}}(\omega)$$

Volumen-
faktord. $\rho_{\text{me}}(\omega)$

$$| \langle \mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{E}} \rangle |^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{\hbar} |d_{12}|^2 \epsilon_0^2 \epsilon$$

Mittelung
über alle Raum-
richtungen

$\langle 1 | \mathbf{e}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{E}} | 2 \rangle$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{3\hbar} d_{12}^2 \frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \cdot \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} = \frac{\omega^3 |d_{12}|^2}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}$$

mittels DOS,

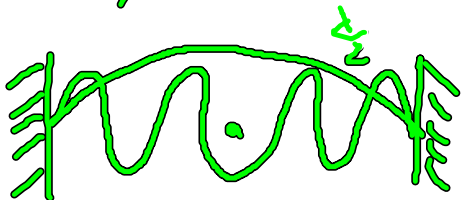
$$\Gamma_{\text{me}} = \frac{d_{12}^2 \pi}{3\epsilon_0 \hbar} \frac{\omega_0}{V} \rho_{\text{me}}(\omega) \Rightarrow \boxed{\Gamma_{\text{me}} \propto \frac{\omega_0}{V} \rho_{\text{me}}(\omega)}$$

→ DOS ist maßgeblicher Faktor für Zerfallrate

6.4 Resonatoren

Modenstruktur des Volumens kann durch Resonatoren geändert werden.

- Fabry-Pérot - Resonator: reflektierende Spiegel

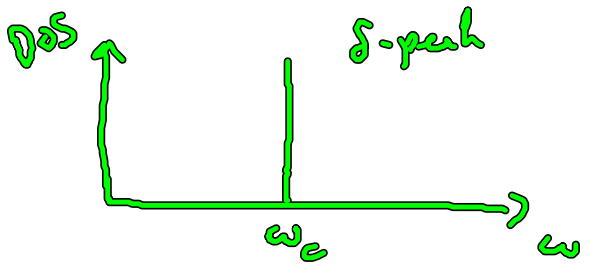


= größt mögl. Wellenlänge
 $\lambda_c = 2L$ „cut-off“

$$\leftarrow L \rightarrow$$

Wenn $\rho_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} > d_c$

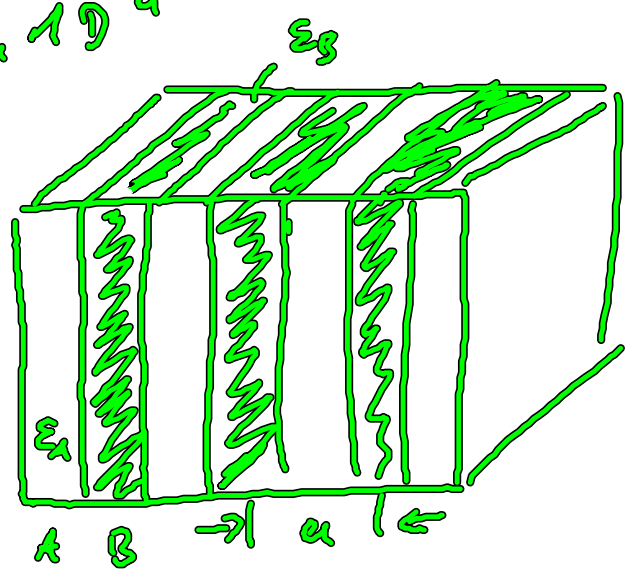
dann wird spont. Emission unterdrückt?



• Photonsche Kristalle;

Regelmäßige Anordnung von 2 Dielektrika mit unterschiedl. Brechzahlen n

„1D“

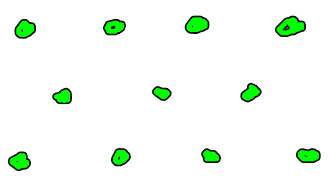


→ period. dielektrische Funktion

$$\epsilon(z) = \epsilon(I + \underline{a})$$

$$a = \mu m \text{ als } V_d \text{ } a_n = \overset{\circ}{A}$$

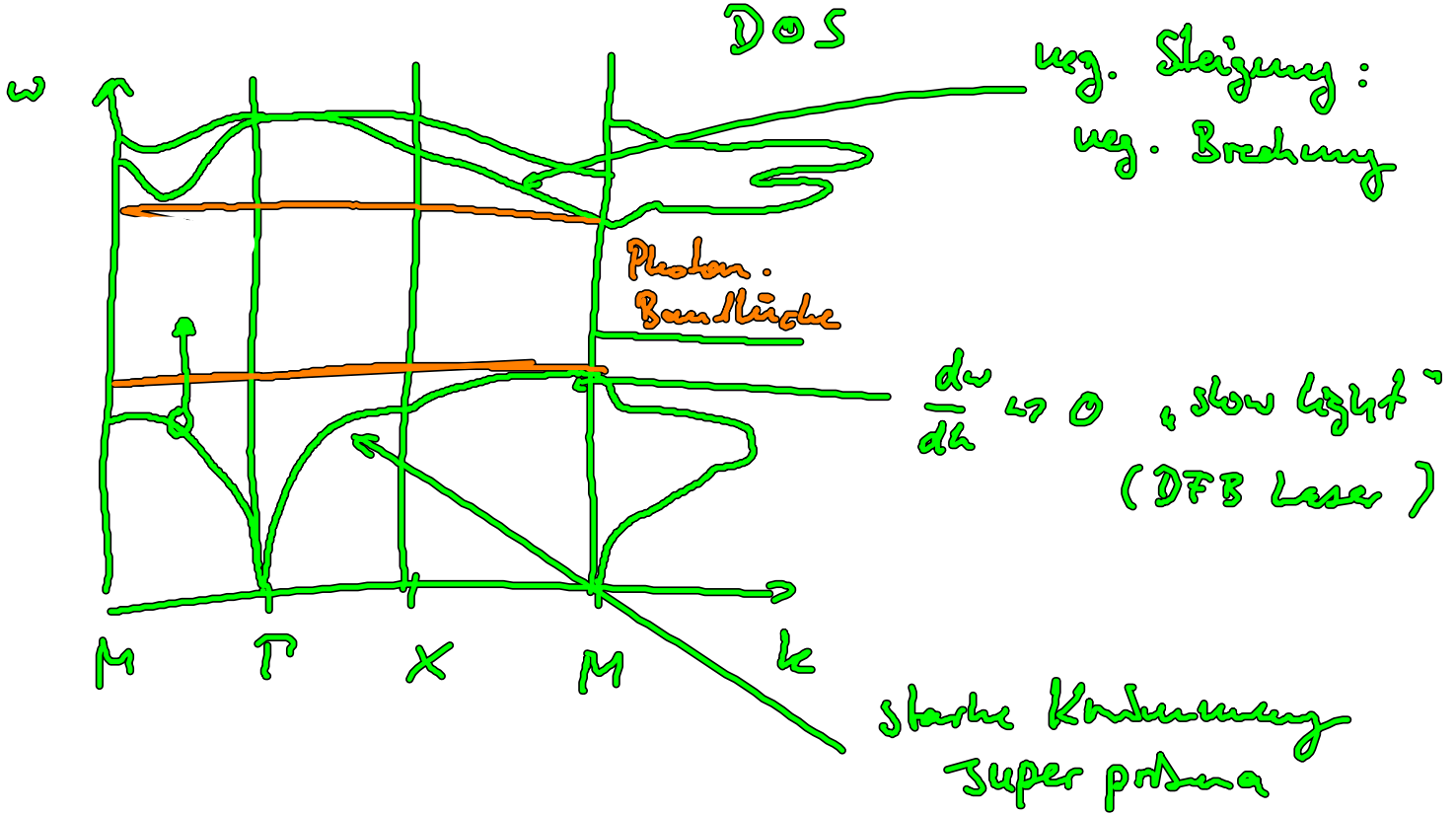
„2D“



↳ Löcher im Silizium-wafer

• Bandstruktur, analog zur FK;

$$\frac{c^2}{\epsilon(\underline{k})} (\nabla \times \nabla \times \underline{E}_{\underline{k}, \omega}) = \omega_{\underline{k}}^2(\omega) \underline{E}_{\underline{k}, \omega}$$

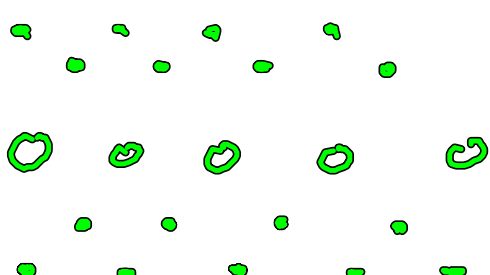


• Cavity als Punktdefekt in Phot. Krist.:

- schiebt einzelne Mode von Bandkante in die Bandlücke
- Lichtfeld lokalisiert am Defekt

$$\underline{E}_c = \sqrt{\frac{1}{V}} \underline{e}_c(\underline{r})$$

• Wellenleiter als Liniendefekte:



Defektband

$$\underline{E}_{wg} = \sqrt{\frac{a}{L_{wg}}} e^{ikx} \underline{e}_{wg}(\underline{r})$$

$$\left[\nabla \times \nabla \times - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\underline{r}) \right] \underline{E}(\underline{r}) = 0$$

