

Bewegungsgleichungen mit cavity loss:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle &= -2kn \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle \\ &+ 2k(n+1) \langle a_c^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \\ &+ 2\sqrt{n+1} \operatorname{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle &= -\dot{y} \Delta \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle \\ &- k(2n+1) \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle \\ &+ k\sqrt{(n+1)(n+2)} \langle a_v^\dagger a_c |n+2\rangle\langle n+1| \rangle \\ &- \dot{y} M \sqrt{n+1} \{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle\langle n| \rangle \\ &\quad - \langle a_v^\dagger a_v |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle |n\rangle\langle n| \rangle &= -n(2k) \langle |n\rangle\langle n| \rangle \\ &+ 2k(n+1) \langle |n+1\rangle\langle n+1| \rangle \\ &- 2\sqrt{n} \operatorname{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n\rangle\langle n-1| \rangle] \\ &+ 2\sqrt{n+1} \operatorname{Im} [M \langle a_v^\dagger a_c |n+1\rangle\langle n| \rangle] \end{aligned}$$

Beweisungen:

1) Resonatorverluste führen zu Ein- und Ausstrahlung im Dichte-matrix-Bild $\langle |n\rangle\langle n| \rangle$

2) im Operatorbild sieht der Verlust anders aus
aus $\partial_t \langle c^\dagger P c^S \rangle = -k(P+S) \langle c^\dagger c \rangle$

$\partial_t \langle |n\rangle\langle n| \rangle |_{\text{diss}}$ koppelt an $\langle |n+1\rangle\langle n+1| \rangle$

$\partial_t \langle c^\dagger c \rangle |_{\text{diss}}$ u. nur an sich selbst

\Rightarrow die Systemdynamik ist einfacher
 mit Dirac Matrixbild (Heiraschreibe
 mit den Operatoren)
aber: die Verluste haben das Heiraschrei-
 Problem

Beispiel, wie sinnvoll es ist, in
 verschiedenen Bildern rechnen zu können

3) $\partial_t \langle n \rangle = -n^2 k \langle n \rangle + k(n+1) \langle n+1 \rangle$
 mit n multiplizieren, dann \sum_n

$$\begin{aligned}
 \partial_t \sum_n n \langle n \rangle &= \partial_t \sum_n \langle n^2 - n \rangle = \partial_t \langle n^2 \rangle \\
 &= - \underbrace{\sum_n n^2 k \langle n \rangle}_{= 2k \langle n^2 \rangle} + \underbrace{n(n+1)k \langle n+1 \rangle}_{= 2k \langle n^2 \rangle} \\
 &= -2k \langle n^2 \rangle
 \end{aligned}$$

4) Photoverlust führt zu experimentellen
 Signalen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Detektor } D \text{ Zählstatistik}$$

6.14: Photonenstatistik, §⁽²⁾ (4,7)

heute: wie sind Photonen korreliert?
 welche Rolle spielen Interaktionen
 zwischen zwei Messsignalen.

interessant für Anwendungen:

- Quantenkommunikation
- Quantenkryptographie
- Messprozesse werden gemessen
(quantum metrology)

Messung an Photondetektoren:



Hanbury Brown - Twiss Setup 1956
(Experimentell-astrophysiker)
Robert Hanbury Brown
Richard Q. Twiss

Intensitätsfluktuationen:

$$g^{(2)}(t, \tau) = \frac{\langle : \underline{I}_1(t) \underline{I}_2(t+\tau) : \rangle}{\langle \underline{I}_1(t) \rangle \langle \underline{I}_2(t+\tau) \rangle}$$

es werden zwei Messungen durchgeführt
an Detektor ① und ②

Aufbau beantwortet Frage:

Wieviel weiß ich über das Messergebnis
an Detektor ②, wenn ich das Messergebnis
bereits erhalten habe?

1.) Fall: ich weiß also nichts.
alles ist Zufall — Poissonstatistik

2.) Fall: Messe ich ein Photon an ①,
dann auch, ziemlich sicher, an ②.
Super-Poisson (Bunching)

3.) Fall: Messe ich ein Photon ①,
dann mit hoher Wahrscheinlichkeit
nicht an ②.

Sub-Poisson (Anti-Bunching)

— nicht erklärbar in der
Maxwell-Theorie

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle c^\dagger(t) c^\dagger(t+\tau) c(t+\tau) c(t) \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle(t) \langle c^\dagger c \rangle(t+\tau)}$$

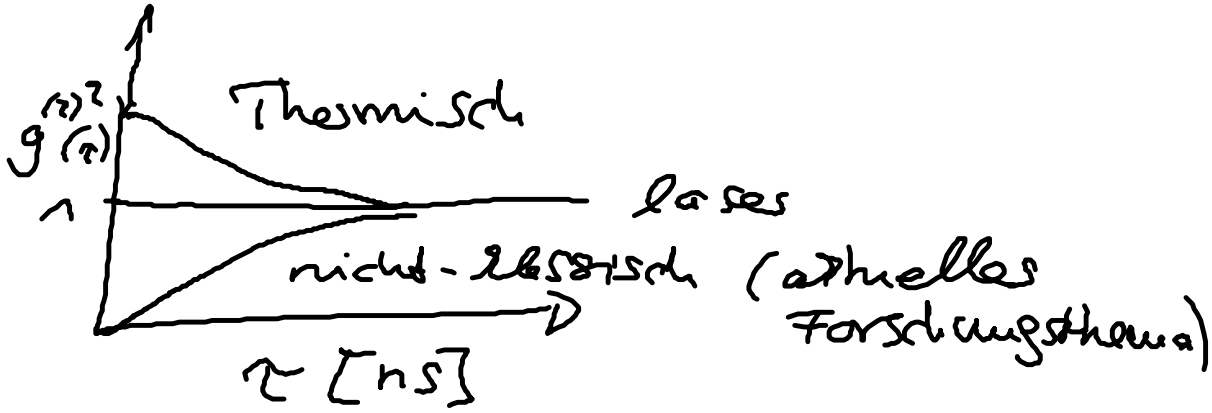
in Messung stationärer Fall

$$\text{also } g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle c^\dagger c^\dagger(\tau) c(\tau) c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$

$g^{(2)}(0) = 1 \longrightarrow$ Poisson-Statistik

$g^{(2)}(0) > 1 \longrightarrow$ Super-Poisson
 $= 2$ (Thermisch)

$g^{(2)}(0) < 1 \longrightarrow$ sub-Poisson
 (nicht klassisch, z.B. Einzelphotonenemitter)



6.15 : Photonstatistik und Photonwahrscheinlichkeiten

1.) Poisson: Glauber-Zustände sind reine Zustände
 $c|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

$$\begin{aligned} \langle c^\dagger c \rangle &= \sum_n n p(n) \\ &= \langle \alpha | c^\dagger c | \alpha \rangle = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^m \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} n \underbrace{\langle m | n \rangle}_{\delta_{m,n}} \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}}_{p(n)} n \end{aligned}$$

Poisson $p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$
 mit $|\alpha|^2 = \bar{n}$

2.) Für thermisches Licht, kein reiner Zustand

$$\langle c^\dagger c \rangle = \text{tr}(c^\dagger c \rho), \rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hbar \omega c^\dagger c}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, \text{ 1-modiger Fall}$$

Wie sieht die Zustandssumme aus?

$$\bar{E} = k_B \left(e^{-\beta k_B \omega c} \right) = \sum \langle n | e^{-\beta k_B \omega c} | n \rangle$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta k_B \omega}} = \frac{e^{\beta k_B \omega}}{e^{\beta k_B \omega} - 1} = \frac{1 + e^{-\beta k_B \omega}}{e^{\beta k_B \omega} - 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{e^{\beta k_B \omega} - 1} = 1 + \bar{n}, \text{ weil Bose-Statistik}$$

mit $\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta k_B \omega} - 1}$

$$p(n) = \frac{1}{Z} \langle n | e^{-\beta k_B \omega c} | n \rangle$$

$$= \frac{1}{\bar{n} + 1} e^{-\beta k_B \omega n}$$

$$\left(\frac{1}{e^{\beta k_B \omega}} \right)^n = \left(1 - 1 + \frac{1}{e^{\beta k_B \omega}} \right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{e^{\beta k_B \omega} - 1}{e^{\beta k_B \omega}} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{e^{\beta k_B \omega} - 1} \right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1 + e^{\beta k_B \omega} - 1} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

$$= \left(\frac{\bar{n} + 1 - 1}{\bar{n} + 1} \right)^n = \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1} \right)^n$$

also $p(n) = \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n} + 1)^{n+1}}$

$$\bar{S} = \frac{\bar{n}^{\bar{n}}}{(\bar{n} + 1)^{\bar{n} + 1}}, \quad \bar{n}^{\bar{n}} = e^{\ln \bar{n} \cdot \bar{n}} = e^{\bar{n} \ln \bar{n}}$$

3.) für nicht-klassisches Licht

$$\langle c^\dagger c \rangle = N, \text{ oder } \langle c^\dagger c \rangle = \sum_n n \delta_{n,N}$$

N vorgegeben

jetzt kann $g^{(2)}$ ausrechnen: $\mathcal{Z} = 0$

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle c^\dagger c^\dagger c c \rangle}{\langle c^\dagger c \rangle^2}$$

$$= \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p(n)}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) \right)^2}$$

Poisson: $\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) = \bar{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) p(n) = \bar{n}^2$

Rechnung: $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-\bar{n}} \bar{n}^n}{(n-2)!}$

Indexumbenennung: $m = n + 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^{n+2}}{n!} = \bar{n}^2 e^{-\bar{n}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\bar{n}^m}{m!}$$

$$= \bar{n}^2 e^{-\bar{n}} \left(e^{\bar{n}} - 1 - \bar{n} \right)$$

also: $g^{(2)}(0) = \frac{\bar{n}^2}{(\bar{n})^2} = 1$

Thermisch: (i) $\sum_{n=1}^{\infty} n p(n) = \bar{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p(n) = 2\bar{n}^2$$

Beweis (i): $\sum_{n=0}^{\infty} n p(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} \quad q = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} < 1$

$$= \frac{1}{\bar{n}+1} \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1+1} = \frac{q}{\bar{n}+1} \sum_{n=0}^{\infty} \partial_q q^n$$

$$= \frac{q}{\bar{n}+1} \partial_q \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{q}{\bar{n}+1} \left(\frac{1}{1-q} \right)^2$$

$$= \frac{\bar{n}}{(\bar{n}+1)^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}} \right)^2 = \frac{\bar{n}}{(\bar{n}+1)^2} (\bar{n}+1)^2 = \bar{n}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{2\bar{n}^2}{(\bar{n})^2} = 2 \quad \text{für thermisches Licht}$$

Nichtklassisch: (Fock-Zustände)

$$p(n) = \delta_{n,N}$$

$$g^{(2)}(0) = \frac{(N-1)N}{(N)^2} = 1 - \frac{1}{N}$$

für $N=1$: Einzelphotonemission

$$\text{für } N \gg 1 \quad g^{(2)}(0) \rightarrow 1$$

6.16: Jaynes-Cummings Modell mit Photonstatistiken

Anfangswerte werden wie folgt

berechnet

$$\langle a_{V/c}^\dagger a_{V/c} |n\rangle \langle n| \rangle (0)$$

$$= \langle a_{V/c}^\dagger a_{V/c} \rangle (0) \langle |n\rangle \langle n| \rangle (0)$$

$$\partial_t \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle \langle n| \rangle = 2 \operatorname{Im} \left[M \sqrt{nt+1} \langle a_{V/c}^\dagger a_c |nt+1\rangle \langle nt+1| \rangle \right]$$

$$\partial_t \langle a_{V/c}^\dagger a_{V/c} |nt+1\rangle \langle nt+1| \rangle = 2 \operatorname{Im} \left[M \sqrt{nt+1} \langle a_c^\dagger a_c |nt+1\rangle \langle nt+1| \rangle \right]$$

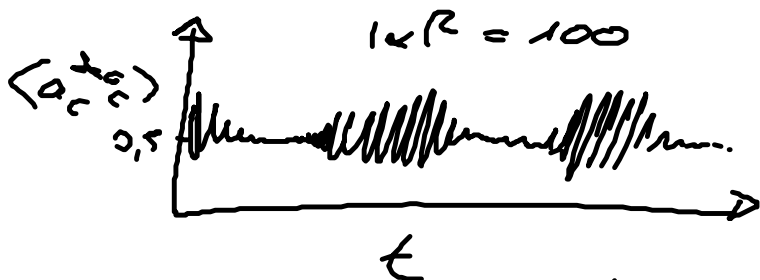
$$\partial_t \langle a_{V/c}^\dagger a_c |nt+1\rangle \langle nt+1| \rangle = -\frac{1}{2} M \sqrt{nt+1} \left\{ \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle \langle n| \rangle - \langle a_{V/c}^\dagger a_{V/c} |nt+1\rangle \langle nt+1| \rangle \right\}$$

für das Endergebnis

$$\sum_n \langle a_c^\dagger a_c |n\rangle \langle n| \rangle = \langle a_c^\dagger a_c \rangle$$

Rabi-Oszillationen:

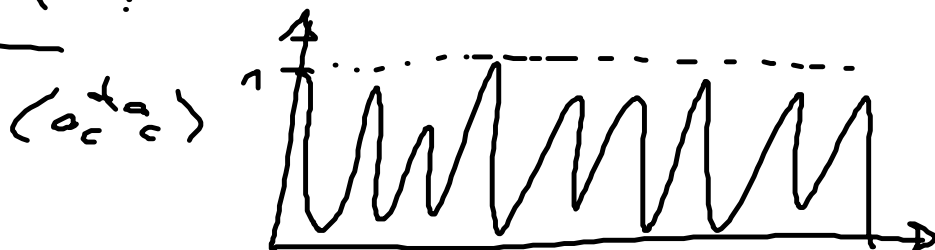
Poisson-Statistik (Case)



collapse & revivals
(Besley 1984)

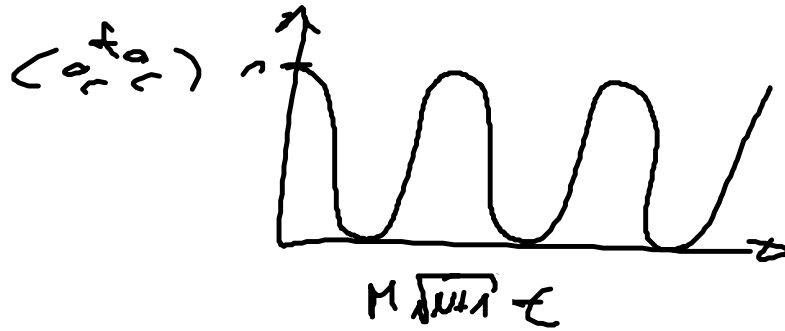
ein Effekt durch quantisierte
Rabifrequenz
besonders: das Revivalverhalten

Thermisch:



ε

Nichtklassische Fall:



Bemerkungen:

- 1.) JCM ist sehr relevant für Grundlagenforschung
- 2.) JCM-Effekte (Collapse & Revival) sind durch moderne Fabrikationsverfahren experimentell erreichbar
aber: für Collapse & Revival noch keine analytische Lösung
- 3.) das Modell mit kleinsten Raum zur Simulation von elektrisch getriebenen Einzelphotonenemittern herangeführt werden (SFS → P7)