

Wiederholung

L, R -Algebra

$$A_L \rho = A \rho, \quad A_R \rho = \rho A$$

t_1 -Algebra

$$O_- = O_L - O_R$$

$$O_+ = \frac{1}{2} (O_L + O_R)$$

II. 4 Zeitentwicklung, Bild der Quantenmechanik und Propagator

Unterabschnitt

- Zeitentwicklung im Schrödinger Bild
- Zeitentwicklung im Wechselwirkung Bild
- Propagationsoperatoren

a) Zeitentwicklung im Schrödinger Bild

Zeitentwicklung im S -Bild

$$\| \partial_t \rho = -\frac{i}{\hbar} H_- \rho$$

Sind Zeitentwicklungsoperatoren

$$\| g(t) = U_{\underline{L}}(t, t_0) g(t_0) \Rightarrow \partial_t U_{\underline{L}}(t, t_0) g(t_0)$$

$$U_{\underline{L}}(t, t_0) g(t_0) = g(t) = \int_{t_0}^t d\tau \left(-\frac{i}{\hbar} \right) H_{\underline{L}}(\tau) U_{\underline{L}}(\tau, t_0) g(t_0) + g(t_0)$$

= $-\frac{i}{\hbar} H_{\underline{L}}(t) U_{\underline{L}}(t, t_0) g(t_0)$

← Integration

$$U_{\underline{L}}(t, t_0) = \left(1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_1}^t H_{\underline{L}}(\tau) U_{\underline{L}}(\tau, t_0) d\tau \right)$$

↳ iterieren

$$U_{\underline{L}}(t, t_0) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \int_{t_0}^t H_{\underline{L}}(\tau) d\tau + \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_0}^t d\tau_2 \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 H_{\underline{L}}(\tau_2) H_{\underline{L}}(\tau_1) U_{\underline{L}}(\tau_2, t_0)$$

Iteration führt auf (von Neumann Reihe)

$$U_{\underline{L}}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t, t_0)$$

$$U_n(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{t_0}^t d\tau_n \dots \int_{t_0}^{\tau_2} d\tau_1 H_{\underline{L}}(\tau_n) \dots H_{\underline{L}}(\tau_1)$$

Falls $t > t_0$

Hier sind die
Zeiten geordnet,

d.h. $(\tau_n > \tau_{n-1} > \dots > \tau_2 > \tau_1)$

(Bei $t < t_0$ genau anders herum)

Zeitordnungsoperatoren

$T_{\leftarrow}, T_{\rightarrow}$, wirken auf Operatoren bzw. Superoperatoren

$$T_{\leftarrow} A(t_1) B(t_2) = \begin{cases} A(t_1) B(t_2) & t_1 > t_2 \\ B(t_2) A(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$

Wenn wir bei n-Operatoren

$$A(\tau_n) A(\tau_{n-1}) \dots A(\tau_1)$$

$$\tau_n > \dots > \tau_1 > \tau_0$$

so stellt

$$T_{\leftarrow} A(\tau_n) A(\tau_{n-1}) \dots A(\tau_1)$$

die Zeitordnung sicher, wir dürfen Operatoren beliebig vertauschen.

Das heißt

$$U_n(t_1, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int d\tau_n \dots \int d\tau_1 T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^n H_-(\tau_i)$$

$t > \tau_n > \dots > \tau_1 > t_0$

T_{\leftarrow} ordnet H_- so spielt keine Rolle ob τ_i geordnet sind

Bemerkung im Fall $t < t_0$ steht hier T_{\rightarrow} !

$$U_n(t_1, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int d\tau_n \dots \int d\tau_1 T_{\leftarrow} \sum_{\substack{\text{jede} \\ \text{Permutation}}} \prod_{i=1}^n H_-(\tau_{k_i})$$

$t > \tau_n > \dots > \tau_1 > t_0$

$\{\tau_{k_1}, \dots, \tau_{k_n}\}$
aus $\{1, \dots, n\}$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{jede} \\ \text{Permutation} \\ \dots}} \int d\tau_n \dots \int d\tau_1 T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^n H_-(\tau_{k_i})$$

$t > \tau_n > \dots > \tau_1 > t_0$

$$= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t d\tau_n \dots \int_{t_0}^t d\tau_1 T_{\leftarrow} \prod_{i=1}^n H_{-}(\tau_i)$$

$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T_{\leftarrow} \left(\prod_{i=1}^n \int_{t_0}^t d\tau_i H_{-}(\tau_i) \right)$$

$$\prod_{i=1}^n \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)$$

$$\left(\int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau) \right)^n$$

$$= \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n T_{\leftarrow} \frac{\left(\int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau) \right)^n}{n!}$$

Also

$$U_{\leftarrow}(t, t_0) = 1 + T_{\leftarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau) \right)^n \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n}{n!}$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)\right)$$

mit $t > t_n > t_0$

z.B

$$U_{\leftarrow}(t, t_0) U_{\leftarrow}(t_1, t_0) = \left(T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)\right) \right) \left(T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} d\tau H_{-}(\tau)\right) \right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} d\tau H_{-}(\tau)\right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau) - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} d\tau H_{-}(\tau)\right)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)\right) = U_{\leftarrow}(t, t_0)$$

Inverse Zeitentwicklungsoperator

$$U_{\leftarrow}(t_0, t) = T_{\rightarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t_0} d\tau H_{-}(\tau)\right) = T_{\rightarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{-}(\tau)\right)$$

$$U_{\pm}^{\pm}(t, t_0)$$

$$U_{\pm}^{\pm}(t, t_0) U_{\pm}^{\pm}(t_0, t) = Id$$

Ziel Zeitentwicklung im Hilbertraum:

Hilfe von +- Algebra!

$$U_{\pm}(t, t_0) \rho = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{\pm}(\tau)\right) \rho$$

$$H_{\pm}(\tau) = H_L(\tau) - H_R(\tau)$$

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau (H_L(\tau) - H_R(\tau))\right) \rho$$

mit Rechts
↑ WW gibt negative
Vorzeichen!

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_L(\tau)\right) \exp\left(+\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_R(\tau)\right)$$

Operatoren mit L und R vertauschen

$$= \left(T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_L(\tau)\right) \right) \left(T_{\leftarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_R(\tau)\right) \right) \rho$$

zeitliche Entwicklung
Links

zeitliche Entwicklung
Re H₀

$$= T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau)\right) \rho T_{\rightarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H(\tau)\right)$$

$$U(t, t_0) \rho U^{\dagger}(t, t_0)$$

↑ ↑

im Hilbertraum

Also einen Zeitentwicklungsoperator im Liouville-Raum
werden zwei im Hilbertraum.

Hilbertraum

$$U(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H(t)\right) \quad U^\dagger(t, t_0) = T_{\rightarrow} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H(t)\right)$$

Dieses von Schrödinger bild, es folgt:

b) Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild

Im WW-Bild H Operator in zwei Teilsplänen

$$H = H_0 + H_1(t)$$

↑
unabhängiges
System
zeit unabhängig

↑
zeitabhängige Störung

Versuch zeitabhängigkeit aufzutrennen

frei Teil H_0 wirkt auf die Operatoren (Operatoren)

und H_1 wirkt auf die Zustände

Zugehörige Zeitentwicklungsoperatoren

$$U_{0, \underline{L}}(t, t_0) = T_{\leftarrow} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt \underbrace{H_{0, \underline{L}}(t)}_{H_{0, \dots}}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H_{0, \underline{L}}(t-t_0)\right)$$

$$g(t) = U_{\underline{L}}(t, t_0) g(t_0)$$

Wir postulieren $g_0(t_0) = g(t_0)$

$$g_0(t) = U_{\underline{L}, 0}(t, t_0) g_0(t_0)$$

$$g_0(t) = U_{\underline{L}, 0}(t_0, t) g(t)$$

← Entfremdung Zeitabhängigkeit von H_0

$$\begin{aligned} \rho_0(t) &= U_{L,0}(t, t') \rho(t') = U_{L,0}^\dagger(t, t_0) U_L(t, t') \rho(t') \\ &= \underbrace{U_{L,0}^\dagger(t, t_0) U_L(t, t') U_{L,0}^{-1}(t', t_0)}_{U_{L,0}(t, t')} \rho_0(t') \end{aligned}$$

$$U_{L,0}(t, t') = U_{L,0}^\dagger(t, t_0) U_L(t, t') U_{L,0}(t', t_0)$$

Zustandsentwicklung von $\rho_0(t)$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_0(t) &= U_{L,0}^\dagger(t, t_0) \underbrace{\left(\frac{i}{\hbar} H_{0,-} - \frac{i}{\hbar} H_{1,-}(t) \right)}_{-\frac{i}{\hbar} H_{1,-}(t)} U_L(t, t') U_{L,0}(t', t_0) \rho_0(t') \\ &= \underbrace{U_{L,0}^\dagger(t, t_0) \left(-\frac{i}{\hbar} H_{1,-}(t) \right) U_{L,0}(t, t_0)}_{=: -\frac{i}{\hbar} H_{1,-}^D(t)} \underbrace{U_{L,0}^\dagger(t', t_0) U_L(t, t') U_{L,0}(t', t_0) \rho_0(t')}_{\rho_0(t)} \\ &= -\frac{i}{\hbar} H_{1,-}^D(t) \rho_0(t) \end{aligned}$$

$$\| \partial_t \rho_0(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{1,-}^D(t) \rho_0 \|$$

$$\Rightarrow \| U_{L,0}(t, t_0) = T \left\langle \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{1,-}^D(\tau) \right) \right\rangle \|$$

c) Was ist ein Propagator? Und unter ersten Ringen

Propagator \leftrightarrow Zustandsentwicklungsoperator

Diagrammatische Methode

$$H = H_0 + H_1(t) \leftarrow \text{Störterm}$$



Diagramm in der Ordnung der Störterm aufstellt!

Im folgenden nur noch WW Bild

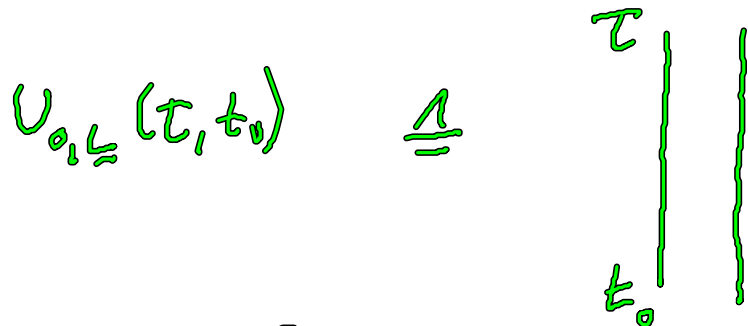
$U_{L,0}(t,t_0)$ hat verschiedene Darstellungen

$$U_{L,0}(t,t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{1,-}^P(\tau)\right)$$

$$= T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau U_{0,+}^+(t,\tau) H_{1,-}(\tau) U_{0,-}(t,\tau)\right)$$

$$U_{0,+}(t,t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau H_{0,-}(\tau)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (t-t_0) H_0\right)$$

$U_{0,+}(t,t_0)$ beschreibt Propagation des ungestörten Systems im Liouville-Raum



Jeder Strich symbolisiert ungestörte Propagation der rechten und linken Seite der Dichtematrix

Erste Rechenregel für Diagramme

$$U_{L,0}(t_3, t_2) U_{L,0}(t_2, t_1) = U_{L,0}(t_3, t_1)$$

