4. Vektorrechnen in orthogonalen, krummlinigen Koordinatensystem

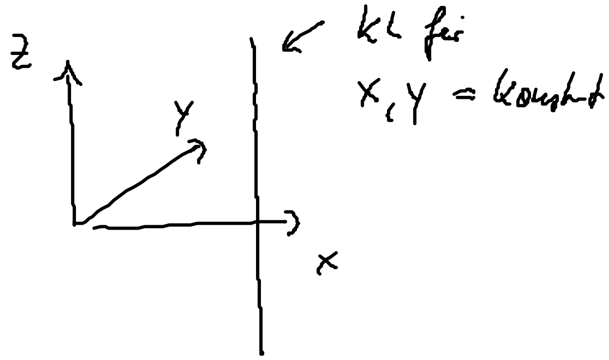
4.1. Orthonormierte Dreibeine

- 3 Zahlen ausreichend um Ortsvektor festzulegen : $\vec{r}$
- Ortsvektor und 3 weitere Zahlen legen Vektor im Raum (Vektorfeld) fest, zB. elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r})$
- verschiedene Koordinaten (festlegen der Zahlen) mgl.
- Koordinatenlinie eines Koordinatensystems :

Linien bzw. Kurven im Raum die entstehen, wenn jeweils 2 Koordinaten festgehalten werden und eine variiert wird $\rightarrow$ $\exists$ 3 Arten von KL

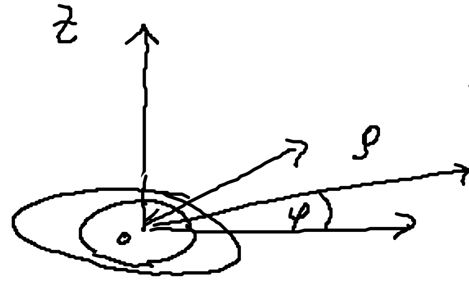
kartesisch

krummlinig



KL sind Geraden

→ geradliniges KS



ebene Polarkoordinaten

φ – ∡ zur x-Achse

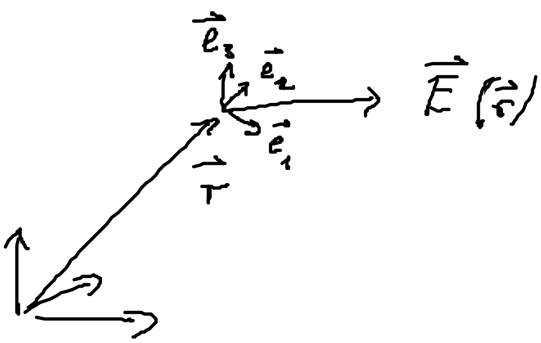
ρ – Abstand v. 0

ρ, z = konstant

KL sind Kreise in Ebene

→ krummliniges KS

Beschreibg. eines Vektorfelds



das KS um $\vec{E}(\vec{r})$ festzulegen legt man ein lokales (am Ort $\vec{r}$) Dreibein (3 Achsen mit Einheitsvektoren) fest

- Vektor wird durch die 3 Vektoren $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ aufgespannt

$\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ wird lokales Dreibein genannt

- man verwendet oft lokale, orthogonale, normierte Dreibeine:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 & i = j \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\nearrow$
$\perp$ aufeinander

„orthonormiertes lokales Dreibein"

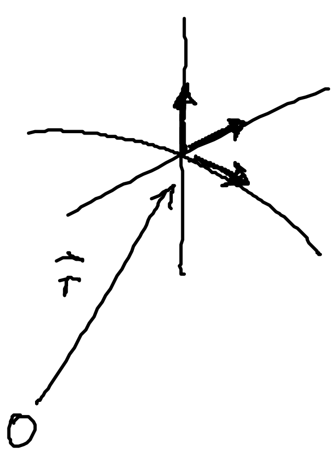
- Koeffizienten eines Vektors in der Darstellung mit $\vec{e}_i$

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \qquad \text{mit } \vec{e}_j \text{ multiplizieren}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{e}_j}} = \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = \underline{\underline{a_j}}$$

$$a_j = \vec{a}\cdot\vec{e}_j \qquad \text{Bestimmung d. Koeffizienten}$$

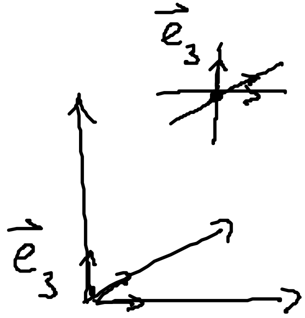
- orthogonales Dreibein wird entlang der Koordinatenlinien gewählt



Schnitt v. 3 KL

$\rightarrow \{\vec{e}_i\}$ werden tangential gewählt

4.2. Kartesisches Koordinatensystem als Bsp. f. orthog. Koordinaten



Schnitt d. KL (Gerade)

Jeder Punkt als Summe 3er Einheitsvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Eigenschaften v. orthonormierten Dreibein

a) orthonormiert heißt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

b) 2 Einheitsvektoren gegeben, so kann 3er erzeugt werden:

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k$ damit legt man Rechtssystem

gilt für Reihenfolge $\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ i & j & k \end{matrix}$

zyklisch Vertauschen mgl. $\rightarrow$ 3, 1, 2 oder 2, 3, 1

c) Spatprodukt um ε-Tensor festzulegen:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{2 Indizes gleich (Spat = 0)} \\ 1 & \text{wenn } ijk \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{nicht zyklisch} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj}$$

antizyklisch

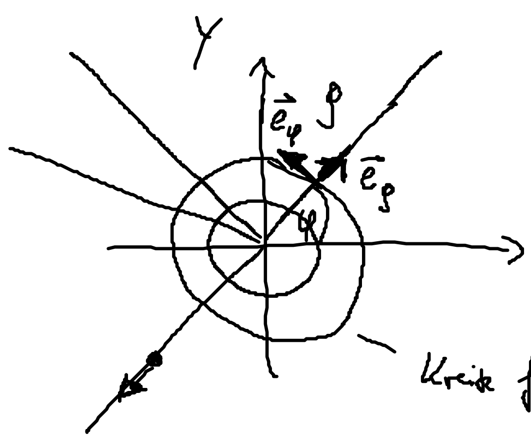
4.4. Krummlinige orthogonale Koordinatensysteme

KS in denen die KL <u>keine</u> Geraden sind

Einheitsvektoren werden gewählt als Tangentenvektor an KL

<u>Beispiel</u> ebene Polarkoordinaten

Abstand, Winkel als Koordinate



Kreise f. ρ = konst

Gerade f. φ = konstant

<u>Bild</u>: $\vec{e}_\rho \propto \vec{r}$ Richtg.

$$\vec{e}_\rho = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$$

$$x = \cos\varphi\,\rho$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\cos\varphi\,\rho\,\vec{e}_x + \rho\sin\varphi\,\vec{e}_y}{\rho}$$

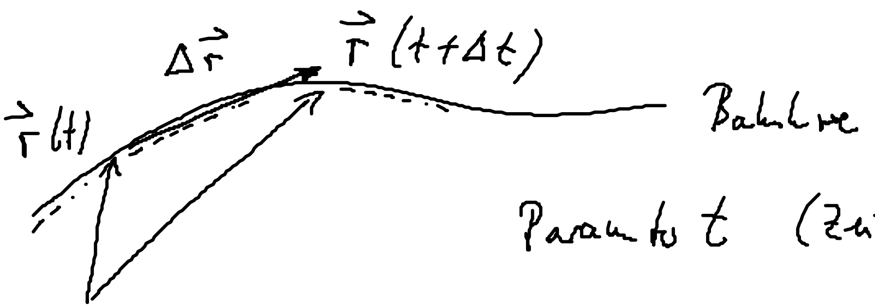
$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$

$y = \sin\varphi\,\rho$ das war bekannt!

4.4.1 Methode zur Bestimmung der Einheitsvektoren

Koordinatenlinien als Bahnkurven auffassen



Parameter t (Zeit)

Ableitg. an Bahnkurve ist Tangentenvektor

Tangentenvektor: $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Analogieschluß: $t \Longleftrightarrow$ (veränderliche) Koordinate der KL (u, v, w) ρ, φ, z

jede einzelne veränderliche Koordinate gibt eine Bahnkurve

Tangenteneinheitsvektor $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v, w)$

$$\vec{e}_u = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u}}_{\text{partielle Ableitg.}} \Bigg/ \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}(u)}{\partial u} \right|}_{\text{stellt}}$$

nach u f. Normierung

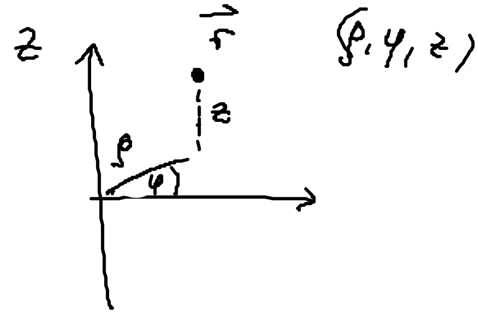
v, w = konst sich.

stellt Richtg sicher

$\longrightarrow$ jeder Einheitsvektor in Koordinat u, v, w

kann berechnet werden, wenn $\vec{r} = \vec{r}(u, v, w)$ bekannt.

4.4.2. Zylinderkoordinaten und Einheitsvektoren



$$\vec{r} = (x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

- $\vec{e}_\rho \propto \partial_\rho \vec{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$

$$|\partial_\rho \vec{r}| = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0)^{1/2} = 1$$

$\vec{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ stimmt mit Bastelansatz überein

- $\vec{e}_\varphi \propto \partial_\varphi \vec{r} = (\rho \cdot -\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$

$$|\partial_\rho \vec{r}| = (\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + 0)^{1/2} = \rho$$

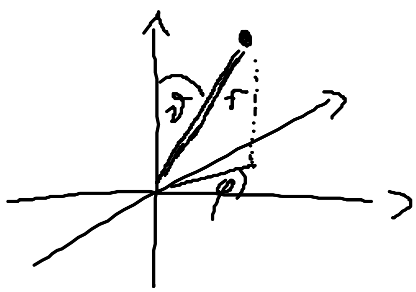
$$\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

$\bullet\ \vec{e}_z = (0, 0, 1)$

man sieht $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

4.4.3. Kugelkoordinaten und Einheitsvektoren

$$\vec{r} = (x, y, z) = (\underbrace{r \sin\vartheta}_{\rho \text{ Zylinderkoordinate}} \cos\varphi,\ r\sin\vartheta \sin\varphi,\ r\cos\vartheta)$$



Ergebnis der ÜA (o.G.)

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} \quad + \text{Skizze}$$

4.5. Komponentenrechnen f. orthogonale Dreibeine

- $$\vec{a}+\vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i + \sum_i b_i \vec{e}_i = \sum_i (a_i + b_i)\vec{e}_i$$

komponentenweise addieren

- $$\lambda \vec{a} = \lambda \sum_i a_i \vec{e}_i = \sum_i \lambda a_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

λ: Zahl

- $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i \cdot \sum_j b_j \vec{e}_j = \sum_{ij} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- $$\vec{a}\times\vec{b} = \sum_i a_i \vec{e}_i \times \sum_j b_j \vec{e}_j$$

$$= \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$$ Summe auswerten

$$\overset{i=1\ j=1}{=}\ a_1 b_1 \underbrace{(\vec e_1 \times \vec e_1)}_{=0} + \overset{i=1\ j=2}{a_1 b_2 \underbrace{(\vec e_1 \times \vec e_2)}_{\vec e_3}} + a_1 b_3 \underbrace{(\vec e_1 \times \vec e_3)}_{-\vec e_2}$$

... alle sammeln

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_1)\vec e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec e_2$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec e_3$$

identisch

Oder: $$= \sum_{ijk} a_i b_j \varepsilon_{ijk} \vec e_k$$

$$\boxed{\vec a \times \vec b = \sum_{ijk} a_i b_j \vec e_k \varepsilon_{ijk}}$$

- $$\frac{d}{dt}\vec a(t) = \frac{d}{dt}\sum_i a_i \vec e_i = \sum_i \dot a_i \vec e_i + \sum_i a_i \dot{\vec e}_i$$

später wichtig f. Scheinkräfte in Mechanik f. bewegte Bezugssysteme

gilt übliche Produktregel

$$\frac{d}{dt}\vec a \cdot \vec b = \dot{\vec a}\cdot \vec b + \vec a \cdot \dot{\vec b}$$

- Spatprodukt: $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$

$$\sum_i c_i \vec{e}_i \cdot \sum_{jkl} \varepsilon_{jkl}\, a_j b_k \vec{e}_l =$$

$$\sum_{ijkl} c_i a_j b_k \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{il}} \varepsilon_{jkl} =$$

$$\sum_{ijk} c_i a_j b_k \varepsilon_{ijk} =$$

$$c_1 a_2 b_3 + c_3 a_1 b_2 + c_2 a_3 b_1 \qquad \text{zyklisch}$$

$$- c_1 a_3 b_2 - c_2 a_1 b_3 - c_3 a_2 b_1 \qquad \text{antizyklisch}$$

$$+0 \qquad \text{gleiche Indizes}$$

3 × 3 Kombination v. Zahlen

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \equiv \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Determinante als Anordnung v. $n \times n$ Zahlen

oder Umrechnungsvorschrift.

Das Spatprodukt ist durch Determinante gegeben (Tutorium)

- Kreuzprodukt als Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_1 \left(a_2 b_3 - a_3 b_2 \right)$$

$$- \vec{e}_2 \cdot \left(\qquad \right)$$

$$+ \vec{e}_3 \left(\qquad \right)$$