

5. Felder

Größen die sich zeitlich und räumlich ändern werden

Felder genannt

(i) Skalare Felder : Temperatur $(\vec{r}, t) \rightarrow T(\vec{r}, t)$
Potential $(\vec{r}, t) \rightarrow U(\vec{r}, t)$

(ii) Vektorfelder : elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$
Gravitationskraft $\vec{F}(\vec{r}, t)$

(iii) Tensorfelder (später)

Zentral f. Charakterisierung v. Feldern ist

Nabla Operator $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z = \sum_i \vec{e}_i \partial_i$

ist wie symbolischer Vektor und

bearbeitet Objekte die rechts davon stehen

$$(i) \quad \underline{\text{grad}} \phi(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \phi = \vec{e}_x \partial_x \phi + \vec{e}_y \partial_y \phi + \vec{e}_z \partial_z \phi$$

↑
Skalar

Gradient einer Skalar Funktion

macht aus Skalar $\phi \rightarrow$ Vektor $\vec{\nabla} \phi$
-feld

$$(ii) \quad \underline{\text{div}} \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z$$

Divergent von \vec{v}

macht aus Vektor ein Skalar Feld

$$(iii) \quad \underline{\text{rot}} \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_x (\partial_y v_z - \partial_z v_y) + \dots$$

Rotation von \vec{v}

ordnet Vektor \vec{v} einem Vektorfeld zu

5.1. Einführung von Nabla an physikalisch Beispiel

Bilanz der kinetischen Energie

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} \right) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

kinetische
Energie

Leistung

Annahme: $\vec{f} = - \left(\vec{e}_x \partial_x U(\vec{r}) + \vec{e}_y \partial_y U(\vec{r}) + \vec{e}_z \partial_z U(\vec{r}) \right)$

\vec{f} soll aus U darstellbar U : skalares Feld

Einschränkung, aber: irreguläre Felder können so dargestellt werden

$$\vec{f} = - \vec{\nabla} U(\vec{r}) = - \text{grad } U(\vec{r})$$

einsetzen

$$\frac{d}{dt} T = - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r})$$

↑ kinetische \overline{E}_k

$$= - \left(\dot{x} \partial_x U(\vec{r}) + \dot{y} \partial_y U(\vec{r}) + \dot{z} \partial_z U(\vec{r}) \right)$$

$$\frac{d}{dt} T = - \frac{d}{dt} U(\vec{r})$$

$$\frac{d}{dt} (T + U) = 0$$

Energiebilanz

$$\frac{d}{dt} E = 0 \quad \text{wenn } \vec{f} = -\vec{\nabla} U$$

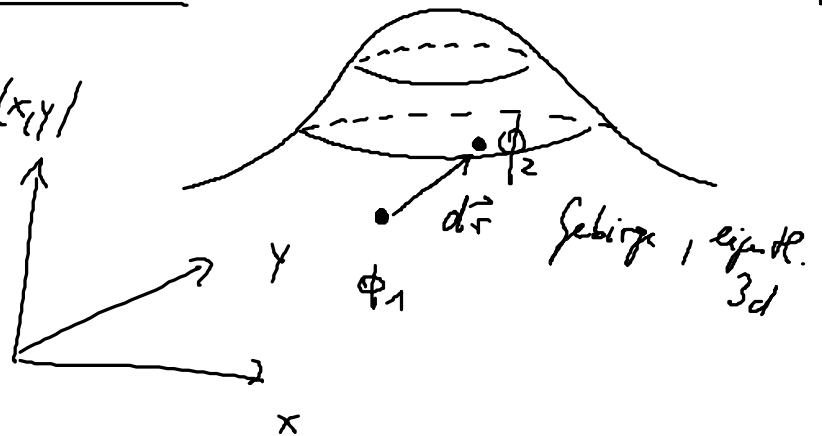
Gesamtenergie T : kinetisch E .

U : potentiell E .

S. 2. Gradient eines skalaren Felds

$$\phi_2 - \phi_1 = \Delta \phi \rightarrow d\phi$$

diskutieren $\phi(\vec{r})$ $\phi(x, y, z)$



impl. Charakterisierung v. ϕ ist Änderung von ϕ

wenn um $d\vec{r}$ fortschreiten

$$\Delta \phi = \phi_2 - \phi_1 = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \Delta x \\ y_2 &= y_1 + \Delta y \\ z_2 &= z_1 + \Delta z \end{aligned} \right\} d\vec{r}$$

0. Term kompensiert sich

Taylorreihe f. klein $\Delta \vec{r}$: 1. Term überlebt

$$\approx \frac{\partial}{\partial x} \phi(\vec{r}) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \phi(\vec{r}) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \phi(\vec{r}) \Delta z$$

$$\Delta \phi = \underbrace{\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \cdot \Delta \vec{r}}$$

was passiert mit ϕ wenn man um

$\Delta \vec{r}$ fortschreitet

Bemerkungen:

a) die größte ϕ -Zunahme ergibt sich für

$$\vec{\nabla} \phi \parallel \Delta \vec{r}$$

$\rightarrow \vec{\nabla} \phi$ bestimmt die Richtg. d. stärksten Anstiegs

b) entlang Platte / Linien von $\Delta\phi = 0$

dh. von Höhe Linien

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

$\rightarrow \vec{\nabla}\phi$ steht \perp auf Platten / Linien gleicher ϕ -Werte

(\perp auf Höhenlinien bzw. Äquipotentialflächen)

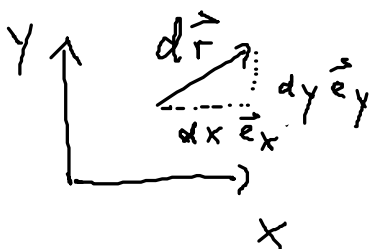
5.3. Nablaoperator und krummlinige Koordinate

$d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$ wird genutzt um Werta in

krummlinige Koordinate zu berechnen

$$x, y, z \rightarrow u, v, w$$

kartesisch

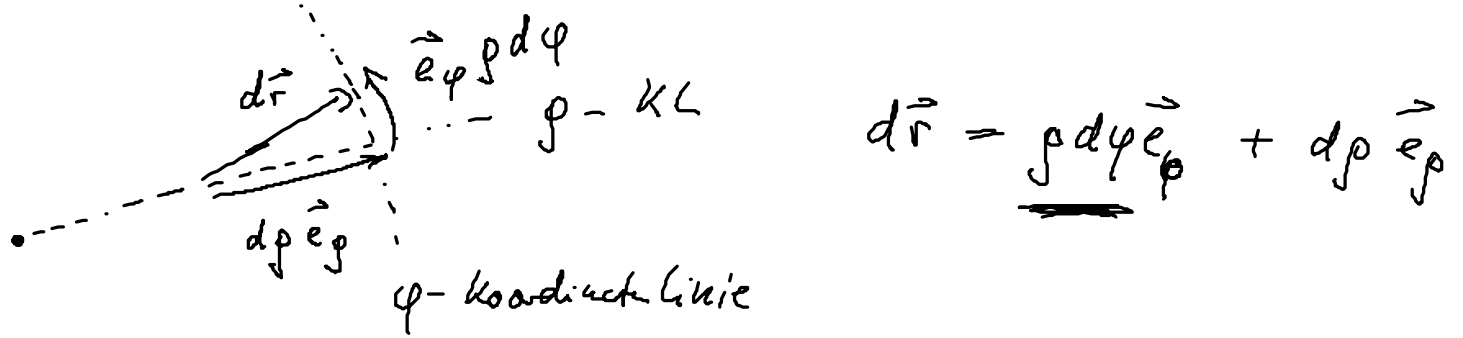


jedes kleine $d\vec{r}$ so aufspaltbar

$$d\vec{r} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

krummlinig

Bsp. Polarkoordinaten in Ebene



$$d\vec{r} = du \vec{e}_u + dv \vec{e}_v + dw \vec{e}_w \quad \text{im allgemeinen}$$

im allgemeinen: $d\vec{r} = \underline{g_u} du \vec{e}_u + \underline{g_v} dv \vec{e}_v + \underline{g_w} dw \vec{e}_w$

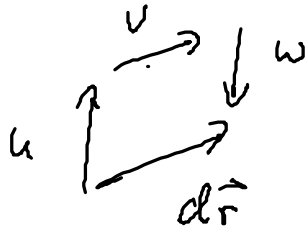
↗
 sind Koeffizienten in eckigen
 Koordinaten für $d\vec{r}$ und heißen

metrische Koeffizienten

Wie bekommt man metrische Koeffizienten?

$\vec{r}(u, v, w)$, falls man entlang KL: $\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw$$



$$\phi(u, v, w)$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv + \frac{\partial \phi}{\partial w} dw \quad \text{Kettenregel}$$

$$= \partial_u \phi \underbrace{\vec{e}_u \cdot \vec{e}_u}_{1} du \frac{g_u}{g_u} + \dots \{v\} \dots \{w\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{g_u} \vec{e}_u}_{u\text{-te Komponente des Nablaoperators}} \partial_u \phi \cdot \underbrace{\vec{e}_u g_u}_{\text{Länge in } \vec{e}_u \text{ Richtg. die man geht um } d\vec{r} \text{ zusammenzubauen}} du + \dots$$

u -te Komponente
des Nablaoperators

Länge in \vec{e}_u
Richtg. die man geht um
 $d\vec{r}$ zusammen-
zubauen

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_u \frac{1}{g_u} \partial_u + \vec{e}_v \frac{1}{g_v} \partial_v + \vec{e}_w \frac{1}{g_w} \partial_w$$

$$\vec{\nabla} / = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$$

kartesisch

metrische Koeffizient sind:

$$g_{\mu\nu} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\mu} \right|^2$$

kartesisch: $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \right| = 1$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, 0)$$

$$\rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \right| = 1$$

Zylinderkoordinat. $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1$

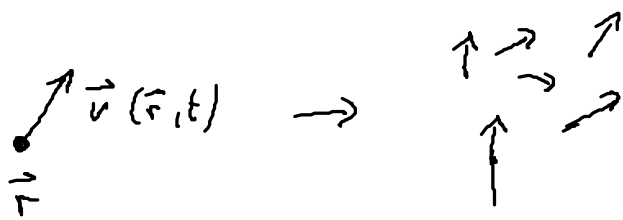
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \partial_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z$$

Kugelkoordinat. $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r$, $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r \sin \vartheta$

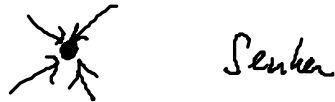
$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta$$

5.4. Charakter v. Vektorfeldern

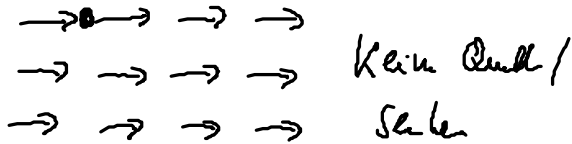
typischerweise durch Feldlinienbildung charakterisiert



zwei Fragen a) kommt es an Entstelle bzw Verschwinder von Feldlinien in ein Pkt \vec{r}



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$$



b) kommt es an Punkt \vec{r} zu Wirbeln

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$$

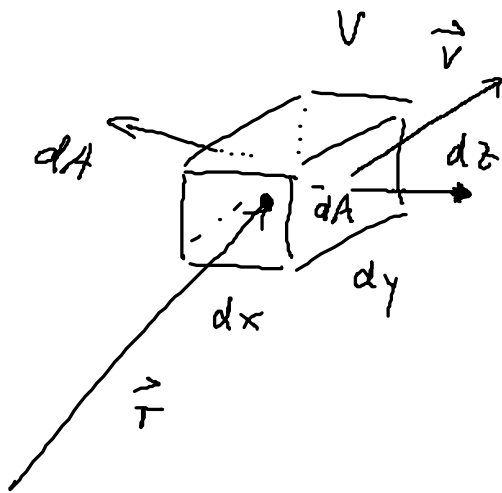


a) Quell dichte : Div \vec{v}

wird zeigen: $\text{div } \vec{v} \equiv \frac{1}{V} \int_{(\partial V)} d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ | $V \rightarrow 0$

ausch. Volumen V um \vec{r}
 Oberflächen d. V : ∂V

$$\stackrel{!}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$$



$\partial V =$ Oberfläche d. Würfels

$d\vec{A}$: Vektor nach außen
 und Betrag $dydz$ (Fläche)

Beitrag d. linienrechten Quadrats

$$\text{div } \vec{v} \equiv \frac{1}{\underbrace{dx dy dz}_V} \left\{ \overbrace{v_x \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy dz} \right.$$

$$\left. + v_x \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) (-dy dz) \right.$$

+ v_y und v_z analog

$$= \frac{1}{dx dy dz} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} V_x(x, y, z)}_{1. \text{ Ordng Taylorreihe}} dx dy dz + \dots \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} V_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} V_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} V_z(x, y, z)$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}$$

Interpretation: weil Feldlinien die aus OF auslaufen

gezählt werden, ist $\operatorname{div} \vec{v}$ Maß für die Quellen

($\operatorname{div} \vec{v} > 0 \hat{=} \text{Entsteh. v. Feldlinien}$ / bzw Senken

($\operatorname{div} \vec{v} < 0 \hat{=} \text{Vergehen v. Feldlinien}$)

dem so ist Integral definiert. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$: Quellstärke

b) Wirbelstärke

ähnlich wie Divergenz



$$\text{rot } \vec{v} \equiv \frac{1}{V} \int d\vec{A} \times \vec{v}(\vec{r})$$

So umkehrfeld steht die Normal Komponente des Feldes (Quelle)
 die senkrecht Komponente zur Oberfläche element
 → Maß für die Wirbel

$$(\text{rot } v)_i = \frac{1}{dx dy dz} \sum_{jk} \left(\epsilon_{ijk} dA_j v_k \left(\vec{r} + \frac{dx_i \vec{e}_i}{2} \right) - \epsilon_{ijk} dA_j v_k \left(\vec{r} - \frac{dx_i \vec{e}_i}{2} \right) \right)$$

Flächenelement
negativ

Taylorreihe 0-Term → 0

$$= \frac{1}{dx dy dz} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \underbrace{dx_i dx_k}_{\text{Kreuzprodukt aus } \vec{\nabla}, \vec{v}} \partial_j v_k(\vec{r}) dx_j$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

5.5. Beispiel

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} =$$

$$\left(\vec{e}_\rho \partial_\rho + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi + \vec{e}_z \partial_z \right) \times v_0 \vec{e}_\varphi =$$

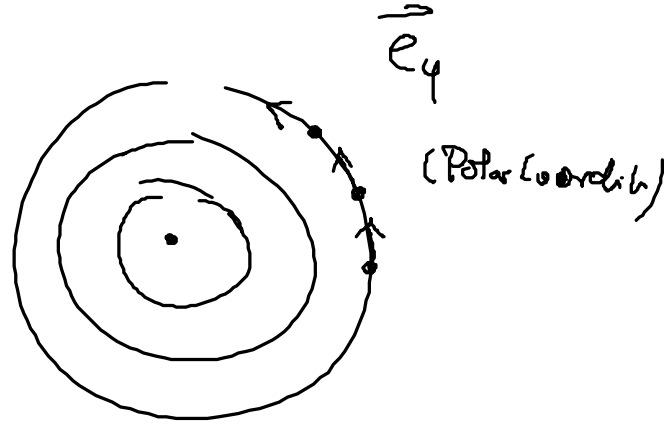
$$\text{mit } \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \times v_0 \vec{e}_\varphi$$

$$= \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \times v_0 \partial_\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v_0}{\rho} \vec{e}_\varphi \times \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{v_0}{\rho} \vec{e}_z$$



Berechnung wichtiger Identitäten:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (i)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (ii)$$

Beweis (i) $[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi)]_i =$

$$\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j [\vec{\nabla} \phi]_k =$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \sum_{\substack{jk \\ \uparrow \downarrow}} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi + \sum_{jk} \epsilon_{ikj} \partial_k \partial_j \phi \right)$$

↓ ↓ vertauschbar

$$= \frac{1}{2} \left(- \quad - \quad \sum_{jk} \ominus \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi \right)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$