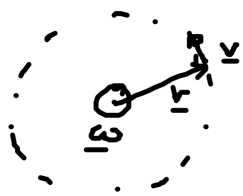
c) Spezielle Tensoren:

- allg. Tensor 2. Stufe: $3\times 3 = 9$ unabh. Komp.
- symmetr. Tensor: $$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \longleftrightarrow T_{ij} = T_{ji}} \quad (2.22)$$
- antisymmetr. Tensor: $$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \longrightarrow T_{ij} = -T_{ji}}$$ ... 3 unabh. Komp.

Bsp.: $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} := \underline{\underline{\Omega}}\, \underline{r}$ mit $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\, \omega_k$



$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

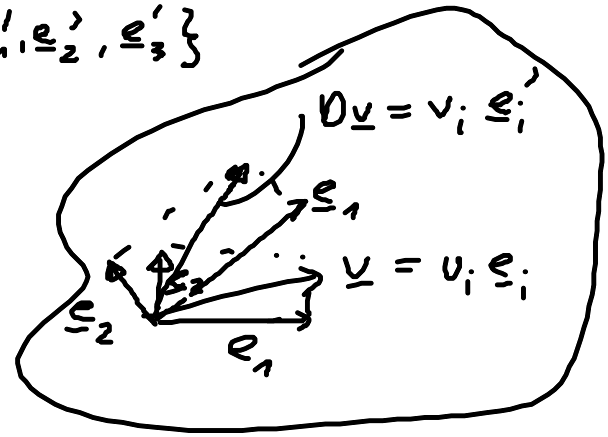
- Zerlegung: $$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}_S + \underline{\underline{T}}_A \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^t\right)}_{\text{antisymmetr.}} \end{aligned}} \quad (2.24)$$
- Einheitstensor: $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij}\, \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

d) Algebra: (wie Matrizen)

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ \text{Addition: } \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \longrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \\
\bullet\ \text{skalare Multiplikation: } \underline{\underline{C}} = p\,\underline{\underline{A}} \longrightarrow C_{ij} = p\, A_{ij}\ ,\quad p \in \mathbb{R} \\
\bullet\ \text{Multiplikation von Tensoren:} \\
\qquad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} \xrightarrow[\text{Zeige!}]{} C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \\
\qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}}\,! \\
\bullet\ \text{Inverser Tensor: } \underline{\underline{T}}^{-1}:\ \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \longrightarrow T_{ik}\left(\underline{\underline{T}}^{-1}\right)_{kj} = \delta_{ij} \\
\bullet\ \text{Spurbildung: } \operatorname{Sp} \underline{\underline{T}} = T_{ii}
\end{array}\right\} \quad (2.25)$$

c) Drehungen

- Drehung der ONB: $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \longrightarrow \{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$



$$\boxed{\underline{e}_i' = D_{ij}\,\underline{e}_j} \qquad (2.26)$$

$\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k' = \delta_{ik}$

$$\boxed{\begin{aligned} D_{ij}\,D_{kj} &= \delta_{ik} \\ \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}} \qquad (2.27)$$

- aktiver Standpkt:

$$\underline{\underline{T}} = T_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{gedrehtes}} D\underline{\underline{T}} := T_{kl}\,\underline{e}_k' \otimes \underline{e}_l'$$
$$= T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\boxed{D\underline{\underline{T}} = [D\underline{\underline{T}}]_{ij}\,\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j}$$

gedrehtes $\underline{\underline{T}}$ $\longrightarrow$ in ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} [D\underline{\underline{T}}]_{ij} &= T_{kl}\,D_{ki}\,D_{lj} \\ &= D^t_{ik}\,D^t_{jl}\,T_{kl} \\ &= D^t_{ik}\,T_{kl}\,D_{lj} \end{aligned}} \qquad (2.28$$

- passiver Standpkt: $\underline{\underline{T}}$ in $\{\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3'\}$?

also: $\underline{\underline{T}} = T_{kl}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \overset{!}{=} T_{ij}'\,\underline{e}_i' \otimes \underline{e}_j'$

$\longrightarrow$ Trafo von Tensorkomponenten:

$$T_{ij}' \overset{(2.16)}{=} \underline{e}_i' \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{e}_j' = \underline{e}_i' \cdot (T_{kl}\,\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)\,\underline{e}_j'$$
$$= T_{kl}\,\underbrace{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}}\,\underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}_j'}_{D_{jl}}$$

$\xrightarrow{(2.26)}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T_{ij}' &= D_{ik}\,D_{jl}\,T_{kl} \\ T_{ij} &= D^t_{ik}\,D^t_{jl}\,T_{kl}' \end{aligned}} \qquad (2.29)$$

f) Diagonalisierung eines symmetrischen $\underline{\underline{T}}$:

- „Tensorbegriffe"
- Eigenwertproblem: $$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{a} = \lambda\,\underline{a}} \qquad (2.30)$$

Eigenvektor (EV) Eigenwert λ

mit: $$\boxed{\begin{gathered}\underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij} \\ \lambda^{(i)} \in \mathbb{R}\end{gathered}} \qquad (2.31)$$

- Darstellung von $\underline{\underline{T}}$ in Eigenvektor-Basis $\{\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}\}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\underline{\underline{T}} = T'_{ij}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)}\, \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)} \\ T'_{ij} = \lambda^{(i)} \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}\end{gathered}}$$

2.3 Vektor-/Tensoranalysis

- Motivation:
  i.f. Kontinuumstheorie $\longleftrightarrow$ Felder

(1) Skalarfelder: $f(\underline{r},t) \in \mathbb{R}$ … Massendichte, Temperatur, Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder: $\underline{v}(\underline{r},t) \in V_p$ … Geschwindigkeit, Impuls(dichte), Kraft(dichte) etc.

(3) Tensorfelder: $\underline{\underline{T}}(\underline{r},t) \in V_p \times V_p$ … Spannungstensor, Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) **vollständiges Differential:**

- Skalarfeld $f(\underline{r},t)$: $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i}$

$[df = f(\{x_i + dx_i\}, t) - f(\{x_i\}, t)]$

$\{x_1, x_2, x_3\}$ ... beliebige krummlinige Koordinaten

- ebenso: $\boxed{d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i}\, dx_i \qquad d\underline{\underline{T}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial x_i}\, dx_i}$ (2.34)

b) **Nabla-Operator:**

- **Def:** Führe „Gradient von f" $=$ grad f als Vektor ein, so daß $df(\underline{r}) = \text{grad} f \cdot d\underline{r}$ (2.35)

mit $d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\, dx_i = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| \underline{e}_i\, dx_i$ und $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$ (ONB)

folgt $\boxed{\text{grad} f = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \underline{e}_i}$ (2.36)

... Gradient von f

- (2.36) legt nahe für ONB.

Def: Nabla-Operator $=$ Vektor Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p \,, \quad \nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (2.37)$$

so daß grad $f = \underline{\nabla} f$

- kartesische Koordinaten:

$\left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}\right| = 1 \longrightarrow \boxed{\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i \nabla_i}$, $i = x, y, z$ (2.38) damit Gradient:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{eines Skalarfeldes } f: & (\underline{\nabla} f)_i = \nabla_i f = f_{,i} \\ \text{" Vektorfeldes } \underline{v}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} = \nabla_i v_j = v_{j,i} \\ \text{" Tensor " 2. St. } \underline{\underline{T}}: & (\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}})_{ijk} = \nabla_i T_{jk} = T_{jk,i} \end{array}} \quad (2.39)$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung

• Zylinder-, Kugelkoordinaten: s. Übungen

$$\left.\begin{array}{l} \nabla_i = \frac{1}{\left|\frac{\partial r}{\partial x_i}\right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \nabla_i \underline{e}_j \neq 0 \\ \\ \text{also Gradient} \\ \text{eines Vektorfeldes:} \quad (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}) = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\ \qquad = (\nabla_i v_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j \underline{e}_i \otimes \nabla_i \underline{e}_j \\ \text{" Tensorfeldes:} \quad \underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}} = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \end{array}\right\} \quad (2.40)$$

c) Divergenzbildung:

• „Kontraktion über Indexpaar" $\longrightarrow$ Reduktion um 2 Tensorstufen

• kartesische Koordinaten:

Divergenz eines Vektors $\underline{v}$: $\boxed{\mathrm{div}\, \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i}}$ (2.41)

$$\text{Tensor 2. Stufe } \underline{\nabla} \otimes \underline{v} \longrightarrow \text{Skalar } \underline{\nabla} \cdot \underline{v}$$

Divergenz eines Tensors 2. St. $\underline{\underline{T}}$:

$$\boxed{(\mathrm{div}\, \underline{\underline{T}})_i = \text{"}(\underline{\nabla}\, \underline{\underline{T}})_i\text{"} = \underbrace{\nabla_j T_{ij}}_{\text{Konvention!}} = T_{ij,j}} \quad (2.42)$$

$$\underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{T}} \longrightarrow \text{Vektor } \mathrm{div}\, \underline{\underline{T}}$$

• Zylinder-, Kugelkoord.: s. Übungen

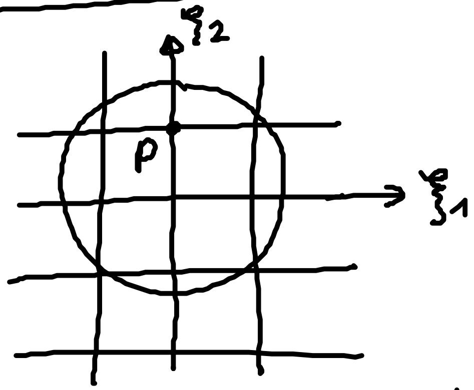
3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeit

• **Ziel**: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten
(ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behandlung anderer Kontinua

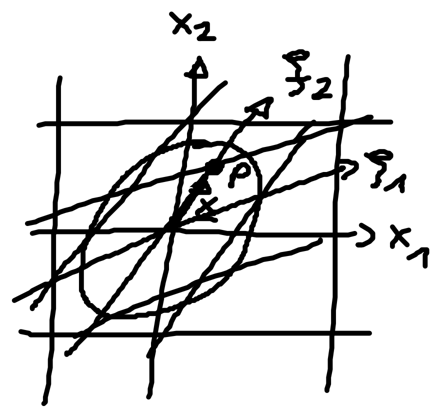
3.1 Kinematik

• Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua / Flüssigkeiten: Variable, Zeitableitungen

a) matrielle und räumliche Koordinaten



Bewegung
Deformation
$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$$



Kontinuum im Referenzzustand
Bsp: undeformierter elast. Körper
$\underline{\xi}$ ... matrielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert Punkt $P = P(\underline{\xi})$ des Kontinuums

Ortsvektor $\underline{x}$ bzw x_1, x_2, x_3 ... räumliche oder Eulersche Koordinaten von P bzgl. festes räumliches KOS (Laborsystem)

• **Felder**:

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{\xi}, t)$ ... matrielle Darstellung $\longrightarrow$ elast. Körper

$\rho, \underline{v}, \underline{\underline{T}}(\underline{x}, t)$ ... räumliche Darstellung $\longrightarrow$ Flüssigkeiten

• i.f.: immer räumliche Darstellung!