

### c) Spezielle Tensoren:

• allg. Tensor 2. Stufe:  $3 \times 3 = 9$  unabh. Komp.

symmetr. Tensor:  $\underline{\underline{I}}^t = \underline{\underline{I}} \Leftrightarrow T_{ij} = T_{ji}$  (2.22)

antisymmetr. Tensor:  $\underline{\underline{I}}^t = -\underline{\underline{I}} \rightarrow T_{ij} = -T_{ji}$   
 ... 3 unabh. Komp.

Bsp:  $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} := \underline{\underline{\Omega}} \underline{r}$  mit  $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ikj} \omega_k$



$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Zerlegung:

$$\underline{\underline{I}} = \underbrace{\underline{\underline{I}}_s}_{\text{symmetr.}} + \underbrace{\underline{\underline{I}}_A}_{\text{antisymmetr.}}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}^t) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}}^t) \quad (2.24)$$

• Einheits tensor:  $\underline{\underline{1}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

### d) Algebra: (wie Matrizen)

- Addition:  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
- Skalare Multiplikation:  $\underline{\underline{C}} = p \underline{\underline{A}} \rightarrow C_{ij} = p A_{ij}, p \in \mathbb{R}$
- Multiplikation von Tensoren:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} \xrightarrow{\text{Zeige!}} C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{A}}!$$

• Inverser Tensor:  $\underline{\underline{I}}^{-1}$ :  $\underline{\underline{I}} \underline{\underline{I}}^{-1} = \underline{\underline{1}} \rightarrow T_{ik} (\underline{\underline{I}}^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$

• Spurbildung:  $Sp \underline{\underline{I}} = T_{ii}$

(2.25)

e) Drehungen

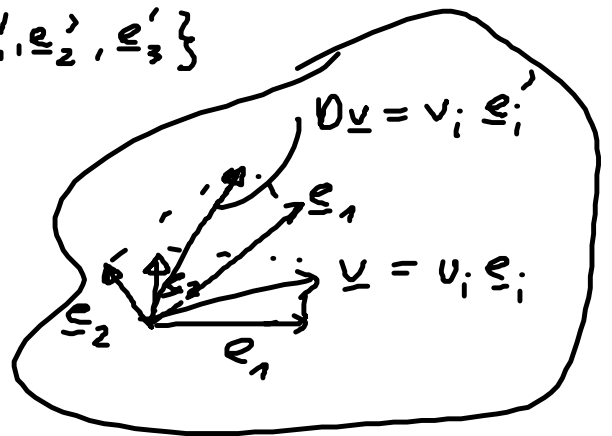
• Drehung der ONB:  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \rightarrow \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$

$$\underline{e}'_i = D_{ij} \underline{e}_j \quad (2.26)$$

$$\underline{e}'_i \cdot \underline{e}'_k = \delta_{ik}$$

$$D_{ij} D_{kj} = \delta_{ik} \quad (2.27)$$

$$\underline{D} \underline{D}^t = \underline{1}$$



• aktiver Standpunkt:

$$\underline{I} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \xrightarrow[\underline{I}]{\text{gedrehtes}} \underline{D}\underline{I} := T_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l = T_{kl} D_{ki} D_{lj} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{D}\underline{I} = [D\underline{I}]_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$[D\underline{I}]_{ij} = T_{kl} D_{ki} D_{lj} = D_{ik}^t D_{jl}^t T_{kl} = D_{ik}^t T_{kl} D_{lj}$$

(2.28)

gedrehtes  $\underline{I}$  in ONB  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

• passiver Standpunkt:  $\underline{I}$  in  $\{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3\}$ ?

also.  $\underline{I} = T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = T'_{ij} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j$

→ Trafo von Tensorkomponenten:

$$T'_{ij} \stackrel{(2.26)}{=} \underline{e}'_i \cdot \underline{I} \underline{e}'_j = \underline{e}'_i \cdot (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) \underline{e}'_j = T_{kl} \underbrace{\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_k}_{D_{ik}} \underbrace{\underline{e}_l \cdot \underline{e}'_j}_{D_{jl}}$$

$$\underline{I} = T'_{ij} \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_j = D_{ik} D_{jl} T_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

$$\underline{I} = D_{ik}^t D_{jl}^t T'_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.29)$$

## f) Diagonalisierung eines symmetrischen $\underline{\underline{T}}$ :

• „Tensor begreifen“

• Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{T}} \underline{a} = \lambda \underline{a} \quad (2.30)$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 Eigenvektor (EV) Eigenwert  $\lambda$

mit:

$$\underline{a}^{(i)} \cdot \underline{a}^{(j)} = \delta_{ij} \quad (2.31)$$

$$\lambda^{(i)} \in \mathbb{R}$$

• Darstellung von  $\underline{\underline{T}}$  in Eigenvektor-Basis  $\{\underline{a}^{(1)}, \underline{a}^{(2)}, \underline{a}^{(3)}\}$ :

$$\underline{\underline{T}} = T'_{ij} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(j)} = \sum_i \lambda^{(i)} \underline{a}^{(i)} \otimes \underline{a}^{(i)}$$

$$T'_{ij} = \lambda^{(i)} \delta_{ij}, \quad \underline{\underline{T}}' = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

## 2.3 Vektor-/Tensoranalysis

• Motivation:

i.f. Kontinuumsmechanik  $\leftrightarrow$  Felder

(1) Skalarfelder:  $f(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}$  ... Massendichte  
Temperatur  
Ladungsdichte etc.

(2) Vektorfelder:  $\underline{v}(\underline{x}, t) \in V_p$  ... Geschwindigkeit  
Impuls (dichte)  
Kraft (dichte) etc.

(3) Tensorfelder:  $\underline{\underline{T}}(\underline{x}, t) \in V_p \times V_p$  ... Spannungstensor  
Deformationsrate

Wie verändern sich diese Felder lokal?

a) vollstudiges Differential:

• Skalarfeld  $f(x, t)$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$[df = f(\{x_i + dx_i\}, t) - f(\{x_i\}, t)]$$

$\{x_1, x_2, x_3\} \dots$  beliebige krummlinige Koordinaten

• ebenso:

$$\begin{aligned} d\underline{v} &= \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} dx_i \\ d\underline{T} &= \frac{\partial \underline{T}}{\partial x_i} dx_i \end{aligned} \quad (2.34)$$

b) Nabla-Operator:

• Def:

Fuhre „Gradient von  $f$ “ =  $\text{grad } f$  als Vektor ein, (2.35)  
so daß  $df(\underline{r}) = \text{grad } f \cdot d\underline{r}$

$$\text{mit } d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} dx_i = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right| \underline{e}_i dx_i \quad \text{und } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \text{ (ONB)}$$

folgt

$$\text{grad } f = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial f}{\partial x_i} \underline{e}_i \quad (2.36)$$

... Gradient von  $f$

• (2.36) legt nahe fur ONB:

Def:

Nabla-Operator = Vektor Differentialoperator

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \in V_p, \quad \nabla_i = \frac{1}{\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

$$\text{so daß } \text{grad } f = \underline{\nabla} f$$

• Kartesische Koordinaten:

$$\left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \right| = 1 \rightarrow \underline{\nabla} = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \underline{e}_i \nabla_i, \quad i = x, y, z \quad (2.38)$$

damit Gradient:

$$\begin{aligned}
 \text{eines Skalarfeldes } f: (\underline{\nabla} f)_i &= \nabla_i f = f_{,i} \\
 \text{" Vektorfeldes } \underline{v}: (\underline{\nabla} \otimes \underline{v})_{ij} &= \nabla_i v_j = v_{j,i} \\
 \text{" Tensor " 2. St. } \underline{T}: (\underline{\nabla} \otimes \underline{T})_{ijk} &= \nabla_i T_{jk} = T_{jk,i}
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$

NB: Tensorstufe erhöht sich um 1 bei Gradientenbildung

• Zylinder-, Kugelkoordinaten: s. Übungen

$$\nabla_i = \frac{1}{|\frac{\partial \underline{x}}{\partial x_i}|} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \nabla_i \underline{e}_j \neq 0$$

also Gradient

$$\begin{aligned}
 \text{eines Vektorfeldes: } (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}) &= (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (v_j \underline{e}_j) \\
 &= (\nabla_i v_j) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j + v_j \underline{e}_i \otimes \nabla_i \underline{e}_j
 \end{aligned}$$

$$\text{" Tensorfeldes: } \underline{\nabla} \otimes \underline{T} = (\underline{e}_i \nabla_i) \otimes (T_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l)$$

(2.40)

c) Divergenzbildung:

• "Kontraktion über Index pair"  $\longrightarrow$  Reduktion um 2 Tensorstufen

• Kartesische Koordinaten:

$$\text{Divergenz eines Vektors } \underline{v}: \quad \boxed{\text{div } \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \nabla_i v_i = v_{i,i}} \tag{2.41}$$

Tensor 2. Stufe  $\underline{\nabla} \otimes \underline{v} \longrightarrow$  Skalar  $\underline{\nabla} \cdot \underline{v}$

Divergenz eines Tensors 2. St.  $\underline{T}$ :

$$\boxed{(\text{div } \underline{T})_i = "(\underline{\nabla} \underline{T})_i" = \nabla_j T_{ij} = T_{ij,j}} \tag{2.42}$$

Kovarianz!

$$\underline{\nabla} \otimes \underline{T} \longrightarrow \text{Vektor } \text{div } \underline{T}$$

- Zylinder-, Kugelkoord.: s. Übungen

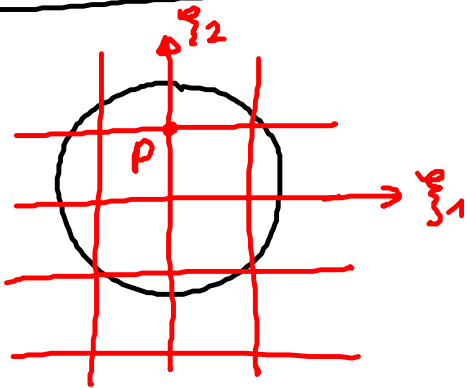
### 3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeit

- Ziel: (i) Vollständige Beschreibung der Dynamik zäher Flüssigkeiten  
(ii) Beispielhafte Vorgehensweise für Behälter oder Kontinua

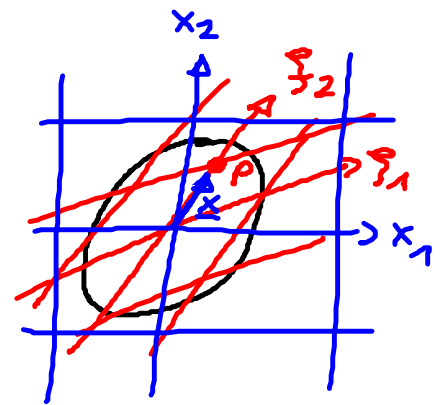
#### 3.1 Kinematik

- Ziel: Beschreibung des dynam. Zustandes von Kontinua / Flüssigkeiten:  
Variable, Zeitabhängigen

##### a) materielle und räumliche Koordinaten



Bewegung  
Deformation  
 $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$



Kontinuum im Referenzzustand  
Bsp: undeformierter elast. Körper

$\underline{\xi}$  ... materielle oder Lagrangesche Koordinaten, indiziert  
Punkt  $P = P(\underline{\xi})$  des Kontinuum's

Ortsvektor  $\underline{x}$  bzw.  $x_1, x_2, x_3$   
... räumliche oder Eulersche Koordinaten von P  
bzgl. festes räumliches KOS  
(Laborsystem)

##### Felder:

$\rho, \underline{v}, \underline{T}(\underline{\xi}, t)$  ... materielle Darstellung  $\rightarrow$  elast. Körper

$\rho, \underline{v}, \underline{T}(\underline{x}, t)$  ... räumliche Darstellung  $\rightarrow$  Flüssigkeiten

• i.f.: immer räumliche Darstellung!