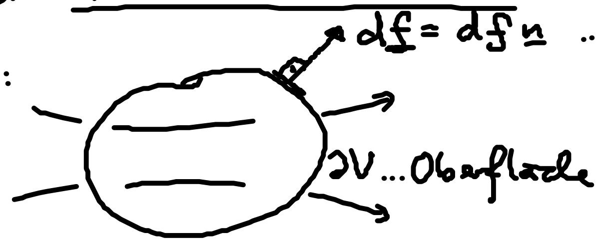
3.3 Massenbilanz

• Kontinuum:



[$\underline{n}$ ... Oberflächennormale mit $|\underline{n}| = 1$]

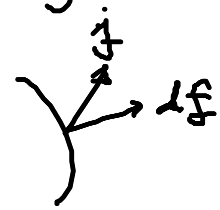
V ... Volumen (fest im Raum)

• Gesamtmasse: $M(t) = \int_V \rho(\underline{x},t)\, d^3x$

Massendichte

• Massenerhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t)\, d^3x = -\underbrace{\int_{\partial V} \underline{j}(\underline{x},t)\cdot d\underline{f}}_{\substack{\text{Masse, die durch die}\\ \text{Oberfläche rausfließt,}\\ \text{pro Zeiteinheit}}} \overset{\text{Gauss}}{=} -\int \operatorname{div}\underline{j}\, d^3x$$

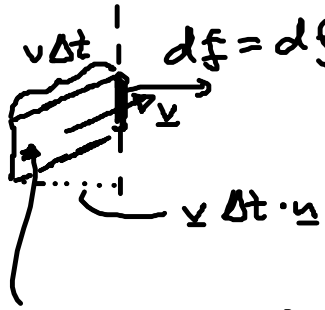


V beliebig: $\longrightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\underline{j} = 0} \qquad (3.15a)$$

... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz für Masse

mit $$\boxed{\begin{aligned}\underline{j} &= \rho\,\underline{v} \text{ ... Massenstromdichte}\\ &= \text{Dichte Erhaltungsgröße} \times \text{Geschw.}\end{aligned}} \qquad (3.15b)$$

Beweis:



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho\,\Delta V = \rho\,\mathbf{v}\Delta t\cdot\underbrace{\mathbf{n}\,df}_{d\mathbf{f}} \longrightarrow \rho\frac{\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\rho\,\mathbf{v}}_{\mathbf{j}}\cdot d\mathbf{f}$$

- (3.15a) ... gültig für alle Erhaltungsgrößen

  (3.15b) ... „konvektiver" Anteil von $\mathbf{j}$!

- inkompressible Flüssigkeit: $\frac{d\rho}{dt} = 0$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho = \underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})}_{=0\ (3.15)} - \rho\,\nabla\cdot\mathbf{v} \longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\mathbf{v} = 0} \quad (3.16)$$

- Hilfsformel:

Geg: physikal. Größe $= \int \rho\,\phi\, d^3x = \int \phi\,\underbrace{dm}_{\text{Masseneinheit}}$

Felder:

$\rho\phi$ ... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Größe = „ „ Masseneinheit

dann gilt: $$\frac{\partial\rho\phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\phi\,\mathbf{v}) = \rho\frac{d\phi}{dt}$$

Beweis: verwende (3.15)

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) thermodynam. Potentiale:

spezifische innere Energie: u

„ Entropie : s

(iii) Impulsdichte: $\rho\mathbf{v} \longrightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4 Impulsbilanz

- Gesamtimpuls: $\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{\rho(\underline{x},t)\, \underbrace{\underline{v}(\underline{x},t)}_{\text{Geschw. von Vol. element } d^3x}}_{\text{Impulsdichte}}\, d^3x$ (3.18)

- Newton (2. Axiom): (3.19)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, d^3x = \underbrace{-\int_{\partial V} \underline{\underline{j}}^{(p)}\, d\underline{f}}_{\substack{\text{Impulsstrom} \\ \text{[konvektiver} \\ \text{Anteil]}}} + \underbrace{\int \rho\, \underline{b}\, d^3x}_{\text{Volumenkräfte}} + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{t}(\underline{x},\underline{n},t)\, d\underline{f}}_{\text{Oberflächenkräfte}}$$

a) Impulsstromdichte: (konvektiver Anteil)

- $\underline{\underline{j}}^{(p)}$ ... Tensor 2. Stufe! [Strom für Vektor $\rho \underline{v}$]

(3.15b) $\longrightarrow$ $\boxed{j^{(p)}_{ij} = \underbrace{\rho v_i}_{\text{Impuls-dichte}} v_j}$ (3.19a) Impuls-dichte * Geschw

$$\boxed{\underline{\underline{j}}^{(p)} = \rho\, \underline{v} \otimes \underline{v}}$$

b) Volumenkräfte:

- $\rho \underline{b}$ ... Volumenkraftdichte
  $\underline{b}$ ... Massenkraftdichte

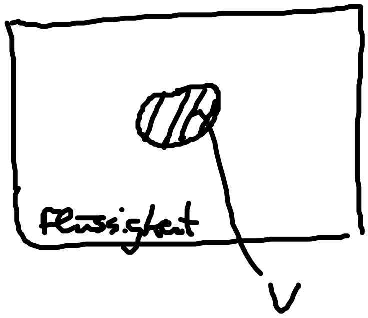
- Bspi externe Felder: Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$
  Gewichtskraft: $\underline{G} = m\underline{g}$
  elektr./magnet. Felder

  greifen lokal an d^3x an!

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor

• Ursprung: kurzreichweitige Ww

Bsp:



– Druckkräfte

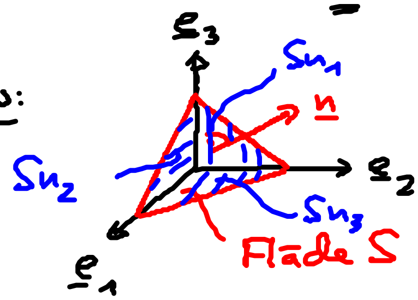
– Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

• Beh:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) &= \underline{\underline{T}}(\underline{x})\,\underline{n} \\ t_i &= T_{ij}\, n_j \end{aligned}} \qquad (3.19b)$$

$\underline{\underline{T}}$ ... Spannungstensor

Bew:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$

Höhe Grundfläche

Impulsbilanz für $S, h \to 0$ $\left[\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div} \underline{j}^{(p)} = \rho \frac{dv}{dt}\right]$

$$S\left[\underline{t}(\underline{x},\underline{n}) + \sum_{i=1}^{3} n_i\, \underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\right] + \frac{1}{3} h S \rho \left(\underline{b} - \frac{d\underline{v}}{dt}\right) = 0$$

$$\lim_{h\to 0}(\ldots) \longrightarrow \quad \underline{t}(\underline{x},\underline{n}) = -\,\underline{t}(\underline{x},-\underline{e}_i)\, n_i \overset{\text{actio}=}{\underset{\text{reactio}}{=}} \underline{t}(\underline{x},\underline{e}_i)\, n_i$$

bzw in Komp:

$$t_i(\underline{x},\underline{n}) = \underbrace{t_i(\underline{x},\underline{e}_j)}_{T_{ij}}\, n_j \qquad \text{qed}$$

(3.19b)

• damit: $$\int \underline{t}(\underline{x},\underline{n})\, df = \int \underline{\underline{T}}\, d\underline{f} = \int \operatorname{div} \underline{\underline{T}}\, d^3x \qquad (3.20)$$

• Verdeutlichung:

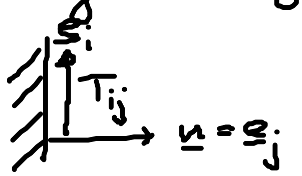
$$\boxed{T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{T}}\, \underline{e}_j}$$

... i-te Komponente des Spannungsvektors $\underline{t} = \underline{\underline{T}}\,\underline{n}$
für Normale $\underline{n} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannungen: $i = j$

Diagonalelemente: Spannungskräfte $\parallel \underline{n}$

(2) Schubspannungen: $i \neq j$



Nichtdiagonalelemente: Spannungskräfte $\perp \underline{n}$

(3) $\underline{\underline{T}}$ symmetrisch (s.u.) $\longrightarrow$ Diagonalisierung

$$\boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{\eta}^{(i)} = \lambda^{(i)}\,\underline{\eta}^{(i)}}$$

Hauptspannungsrichtungen

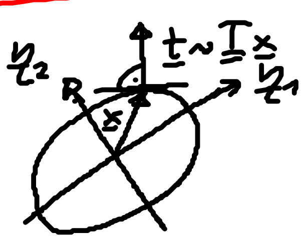
Hauptspannungen $\parallel \underline{\eta}^{(i)}$

NB: keine Schubspannungen $\perp \underline{\eta}^{(i)}$

• Poinsotsche Konstruktion:

$$\boxed{\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \text{konst.}}$$

... Spannungsfläche = Bilinearform



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spannungsfläche

Beweis: Übungen

d) Impulsbilanz:

• Newton (3.19), $\int \underline{j}^{(P)} d\underline{f} = \int \operatorname{div} \underline{\underline{j}}^{(P)} d^3x$, (3.20) & V beliebig

$\rho\, \underline{v} \otimes \underline{v}$

kanonische Form:

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \mathrm{div}\underbrace{(\rho\, \underline{v}\otimes\underline{v} - \underline{\underline{T}})}_{\text{Impulsstrom-dichte}} = \underbrace{\rho\, \underline{b}}_{\text{Quell-term}}} \qquad (3.21)$$

NB: Kontinuitätsgleichung $\underline{j} = \rho \underline{v}$ & Quellterm!

· Umschreibung:

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \nabla_j(\rho v_i v_j) \overset{(3.17)}{=} \Big[\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \cancel{v_i \nabla_j (\rho v_j)} + \rho v_j \nabla_j v_i$$

$$= \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\, v_i\right) = \rho \frac{d v_i}{dt}$$

ϕ in (3.17)

folgt aus

$$\boxed{\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = \mathrm{div}\,\underline{\underline{T}} + \rho\, \underline{b}} \qquad (3.22)$$