

$$TG = S_p \underline{I}' A - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T \geq 0 \quad (3.43)$$

Dissipation bei mechan. Arbeit Dissipation durch Wärmefluss

... für isotherme Flüssigkeit

• Deutung: $\rightarrow G = S_p \frac{I'}{T} A + q \cdot \nabla \frac{1}{T}$

(i) Vgl. Thermodynamik

(ii) Deutung durch Hydrodynamik:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}' \\ q \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Fluss} \\ \text{Strahndichte} \end{array} \text{ von Erhaltungsgröße } \left\{ \begin{array}{l} s^v \\ e \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A} \\ \nabla \frac{1}{T} \end{array} \right\} \text{generalisierte Kraft} =$$

$$= \text{Gradienten der zur Erhaltungsgröße } \left\{ \begin{array}{l} s^v \\ e \end{array} \right\} \text{ zugehörigen thermodynamischen Variablen } \left\{ \begin{array}{l} \frac{v}{T} \\ \frac{1}{T} \end{array} \right.$$

(3.44)

b) Theorie der irreversiblen Thermodynamik

• nahe thermodynamischem Gleichgewicht:

$$\left(\begin{array}{l} q \\ \underline{I}' \end{array} \right) = \mathcal{L} \left(\begin{array}{l} \nabla \frac{1}{T} \\ \underline{A}/T \end{array} \right) \quad (3.45)$$

\mathcal{L} ... Matrix der Transportkoeffizienten

(i) Onsager'sche Reziprozitätsrelation: Nobelpreis (Chemie) 1968

$$\mathcal{L}(\underline{K}) = \mathcal{L}^T(-\underline{K}) \text{ bzw. } \mathcal{L}_{ij}(\underline{K}) = \mathcal{L}_{ji}(-\underline{K}) \quad (3.46)$$

[\underline{K} ... Magnetfeld]

Grund: Zeitumkehrinvarianz der mikroskop. Bewegungsgleichungen

(ii) \mathcal{L} muß unter Symmetrioperationen des Systems invariant sein (3.47)

Bsp: isotrope Flüssigkeit invariant unter $\underline{R} \in SO(3)$
 ohne Voraussetzung

$\rightarrow \mathcal{L}$ invariant unter $\underline{R} \in SO(3)$

• Verhalten unter Zeitumkehr:

Bsp: $\underline{g}^v = \underline{g} \frac{d\underline{x}}{dt} \rightarrow -\underline{g}^v \quad \underline{f} = + \rightarrow -t$

Impulsbilanz (3.21)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{g}^v) + \text{div} [\underline{g}^v \otimes \underline{v} + p \underline{1} - \underline{I}'(\underline{A})] = \underline{g}^b$$

Zeitumkehr: $\frac{\partial}{\partial t} (\underline{g}^v) + \text{div} [\underline{g}^v \otimes \underline{v} + p \underline{1}] - \underbrace{\underline{I}'(-\underline{A})}_{+\underline{I}'(\underline{A})} = \underline{g}^b$

keine Zeitumkehrinvarianz $\hat{=}$ Irreversibilität

$\hat{=}$ Dissipation

\rightarrow dissipative Ströme verhalten sich unter Zeitumkehr wie die dazugehörige Erhaltsgröße (3.48)

Bsp: $\underline{I}' \leftrightarrow \underline{g}^v$

c) Anwendg auf Newtonsche Flüssigkeit

• Zeitumkehr:

$$\underline{g}^v \rightarrow -\underline{g}^v \Rightarrow \underline{I}' \rightarrow -\underline{I}' \quad \underline{f} = t \rightarrow -t$$

$$\underline{g}^e \rightarrow \underline{g}^e \Rightarrow \underline{q} \rightarrow \underline{q} \quad \text{" "}$$

wegen: $\left. \begin{array}{l} \underline{A} \rightarrow -\underline{A} \\ \underline{\nabla T} \rightarrow \underline{\nabla T} \end{array} \right\} \underline{f} = t \rightarrow -t$

folgt aus (3.45):

$$\begin{cases} T'_{ij} = \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i = -\kappa_{ij} \nabla_j T \end{cases} \quad (3.48)$$

NB: T werde in $\underline{y}, \underline{x}$ gestreckt

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor

Symmetrieforderung: $\kappa_{ij} = \kappa_{kl} R_{ki} R_{lj}$, $\underline{R} \in SO(3)$

$$\rightarrow \begin{cases} \underline{\kappa} = \kappa \underline{1} \\ \underline{q} = -\kappa \underline{\nabla} T \end{cases}$$

κ ... Wärmeleitfähigkeit

NB: $\kappa \geq 0$ (3.51)

$$\text{wegen } \theta = -\frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \underline{\nabla} T = \frac{\kappa}{T^2} (\underline{\nabla} T)^2 \geq 0$$

[... „Wärmefluss von höher zu niedriger Temperatur“]

(ii) Fähigkeitstensor η_{ijkl} : (4. Stufe)

(1) Permutationssymmetrie:

$$(3.52) \begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} \text{ wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \text{ \& } A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases}$$

wegen Dissipationsfunktion:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \text{Sp } \underline{T}' \underline{A} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \end{aligned}$$

2w... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibergewinne

$$\underline{T}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{A}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationssymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta'_{ijkl} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l} \quad (3.55)$$

$$\underline{R} \in SO(3)$$

(1) $R(2) \xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\eta_{ijkl} = \eta' \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{A}} + \eta' \underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}}$$

... $\underline{\underline{T}}'$ für Newton'sche Flüssigkeit

• Umkehrung:

$$\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underbrace{(\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}})}_{\text{Schernng}} + (\eta' + \frac{2}{3} \eta) \underbrace{\underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}}$$

η ... Scherviskosität $\eta' + \frac{2}{3} \eta$... Volumenviskosität

Wähle: $\left. \begin{array}{l} \text{reine Schernng (Sp} \underline{\underline{A}} = 0) \\ \text{reine Kompression (} \underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{1}}) \end{array} \right\}$ und $T_{ij} = \text{Sp} \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}} \geq 0$

$$= 2\eta \text{Sp} [(\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}})^2] + (\eta' + \frac{2}{3} \eta) (\text{Sp} \underline{\underline{A}})^2$$

$$\rightarrow \boxed{\eta \geq 0, \eta' + \frac{2}{3} \eta \geq 0} \quad (3.58)$$

3.9 Newton'sche Flüssigkeit:

Zusammenstellung der Gleichungen

• s. Folie

3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

• NS-Gleichungen

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = - \nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla \operatorname{div} \underline{v} + \underline{g} \quad (3.62)$$

NB: mit Massebilanz & Materialgesetz $p(\rho)$: ($T = \text{konst}$)

4 Gleichungen für \underline{v}, p

• Umkehr unter Zeitumkehr:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \underline{v} \rightarrow -\underline{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \nabla^2 \underline{v} = -\eta \nabla^2 \underline{v}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation“ von Energie \leftrightarrow Irreversibilität

• Nichtlinearität: $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \rightarrow$ Turbulenz