$$\boxed{T\dot{\sigma} = \underbrace{\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{\Pi}}'\underline{\underline{A}}}_{\substack{\text{Dissipation} \\ \text{bei mechan.} \\ \text{Arbeit}}} - \underbrace{\frac{1}{T}\,\underline{q}\cdot\underline{\nabla} T}_{\substack{\text{Dissipation} \\ \text{durch Wärmefluß}}} \geq 0} \qquad (3.43)$$

... für isotrope Flüssigkeit

• Deutung: $\longrightarrow \quad \dot{\sigma} = \mathrm{Sp}\,\frac{\underline{\underline{\Pi}}'}{T}\underline{\underline{A}} + \underline{q}\cdot\underline{\nabla}\frac{1}{T}$

(i) Vgl. Thermodynamik

(ii) Deutung durch Hydrodynamik:

$$\left.\begin{matrix} \underline{\underline{\Pi}}' \\ \underline{q} \end{matrix}\right\} \text{Fluß Stromdichte von Erhaltungsgröße} \left\{\begin{matrix} \rho\underline{v} \\ e \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{\underline{\underline{A}}}{T} \\ \underline{\nabla}\frac{1}{T} \end{matrix}\right\} \text{generalisierte Kraft} = \qquad (3.44)$$

$$= \text{Gradienten der zur Erhaltungsgröße} \left\{\begin{matrix} \rho\underline{v} \\ e \end{matrix}\right\} \text{konjugierten thermodynam. Variablen} \left\{\begin{matrix} \frac{\underline{v}}{T} \\ \frac{1}{T} \end{matrix}\right.$$

b) Theorie der irreversiblen Thermodynamik

• nahe thermodynamischem Gleichgewicht:

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Flüsse = lineare Funktionen der Kräfte} \\ \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{\underline{\Pi}}' \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \underline{\nabla}\frac{1}{T} \\ \underline{\underline{A}}/T \end{pmatrix}\end{gathered}} \qquad (3.45)$$

$\mathcal{L}$ ... Matrix der Transportkoeffizienten

(i) Onsagersche Reziprozitätstheorem: Nobelpreis (Chemie) 1968

$$\boxed{\mathcal{L}(\underline{B}) = \mathcal{L}^{+}(-\underline{B}) \quad \text{bzw} \quad \mathcal{L}_{ij}(\underline{B}) = \mathcal{L}_{ji}(-\underline{B})} \qquad (3.46)$$

[$\underline{B}$ ... Magnetfeld]

Grund: Zeitumkehrinvarianz der mikroskop. Bewegungsgleichungen

(ii) $\boxed{\mathcal{L} \text{ muß unter Symmetrieoperationen des Systems invariant sein}}$ (3.47)

Bsp: isotrope Flüssigkeit invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$
ohne Vorzugsrichtung

$\longrightarrow \mathcal{L}$ invariant unter $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$

- Verhalten unter Zeitumkehr:

Bsp: $\rho \underline{v} = \rho \frac{dx}{dt} \longrightarrow -\rho \underline{v}$ $\hat{=}\; t \to -t$

Impulsbilanz (3.21)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}\left[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{I}}'(\underline{\underline{A}})\right] = \rho \underline{b}$$

Zeitumkehr: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \operatorname{div}\left[\rho \underline{v} \otimes \underline{v} + p \underline{\underline{1}}\right] \underbrace{- \underline{\underline{I}}'(-\underline{\underline{A}})]}_{+\underline{\underline{I}}'(\underline{\underline{A}})} = \rho \underline{b}$$

keine Zeitumkehrinvarianz $\hat{=}$ Irreversibilität

$\hat{=}$ Dissipation

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{dissipative Ströme verhalten sich unter Zeitumkehr wie die dazugehörigen Erhaltungsgrößen}}$ (3.48)

Bsp: $\underline{\underline{I}}' \longleftrightarrow \rho \underline{v}$

c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit

- Zeitumkehr:

$\rho \underline{v} \longrightarrow -\rho \underline{v} \implies \underline{\underline{I}}' \longrightarrow -\underline{\underline{I}}'$ $\hat{=}\; t \to -t$

$\rho e \to \rho e \implies \underline{q} \longrightarrow \underline{q}$ "   "

wegen: $\left.\begin{array}{l} \underline{\underline{A}} \longrightarrow -\underline{\underline{A}} \\ \underline{\nabla} T \longrightarrow \underline{\nabla} T \end{array}\right\} \hat{=}\; t \to -t$

folgt aus (3.45):

$$\boxed{\begin{aligned} T'_{ij} &= \eta_{ijkl} A_{kl} \\ q_i &= -\varkappa_{ij} \nabla_j T \end{aligned}} \qquad (3.49)$$

NB: T werde in $\underline{\eta}, \underline{\varkappa}$ geschluckt

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor

Symmetrieforderung: $\varkappa_{ij} = \varkappa_{kl} R_{ki} R_{lj}$, $\underline{R} \in SO(3)$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{\varkappa}} &= \varkappa \, \underline{\underline{1}} \\ \underline{q} &= -\varkappa \underline{\nabla} T \end{aligned}}$$

$\varkappa$ ... Wärmeleitfähigkeit

NB: $\boxed{\varkappa \geq 0}$ (3.51)

wegen $\sigma = -\frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \underline{\nabla} T = \frac{\varkappa}{T^2} (\underline{\nabla} T)^2 \geq 0$

[... „Wärmefluß von hoher zu niederer Temperatur"]

(ii) Zähigkeitstensor η_{ijkl} : (4. Stufe)

(1) Permutationssymmetrie:

$$(3.52) \quad \begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} & \text{wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \ \& \ A_{kl} = A_{lk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases}$$

wegen Dissipationsfunktion: $\boxed{\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}} \\ &= \frac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{ij} A_{kl} \end{aligned}}$

2w ... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{\underline{T}}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{A}}} \qquad (3.54)$$

(2) Rotationssymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l} \qquad (3.55)$$

$$\underline{\underline{R}} \in SO(3)$$

(1) $R(2) \xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$T'_{ij} = \eta_{ijkl} A_{kl} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \eta_{ijkl} &= \eta' \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ \underline{\underline{T}}' &= 2\eta \underline{\underline{A}} + \eta' \underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}} \end{aligned}} \qquad (3.56)$$

... $\underline{\underline{T}}'$ ≙ Newtonsche Flüssigkeit

• Umschreibung:

$$\boxed{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} - \tfrac{1}{3} \underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}\right)}_{\text{Scherung}} + \left(\eta' + \tfrac{2}{3}\eta\right) \underbrace{\underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}}}$$

η ... Scherviskosität — $\eta' + \frac{2}{3}\eta$ ... Volumenviskosität

Wähle: $\left.\begin{array}{l} \text{reine Scherung } (\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}} = 0) \\ \text{reine Kompression } (\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{1}}) \end{array}\right\}$ und $T\dot{\sigma} = \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{T}}' \underline{\underline{A}} \geq 0$

$$= 2\eta\, \mathrm{Sp}\left[\left(\underline{\underline{A}} - \tfrac{1}{3} \underline{\underline{1}}\, \mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}\right)^2\right] + \left(\eta' + \tfrac{2}{3}\eta\right)\left(\mathrm{Sp}\, \underline{\underline{A}}\right)^2$$

$$\longrightarrow \boxed{\eta \geq 0, \quad \eta' + \tfrac{2}{3}\eta \geq 0} \qquad (3.58)$$

3.9 Newtonsche Flüssigkeit: Zusammenstellung der Gleichungen

• s. Folie

3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

- NS-Gleichungen

$$\varrho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right) = -\nabla p + \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} + (\eta+\eta')\underline{\nabla}\,\mathrm{div}\,\underline{v} + \varrho\,\underline{b} \quad (3.62)$$

NB: mit Massebilanz & Materialgesetz $p(\varrho)$: (T = konstant)

4 Gleichungen für $\underline{v}, \varrho$

- Verhalten unter Zeitumkehr:

$$\left.\begin{array}{l} t \to -t \\ \underline{v} \to -\underline{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v} = -\eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation" von Energie $\longleftrightarrow$ Irreversibilität

- Nichtlinearität: $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v} \longrightarrow$ Turbulenz