

# 3.10. Die Navier-Stokes-Gleichungen

• NS-Gleichungen:

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla (\operatorname{div} \underline{v}) + \rho \underline{b} \quad (3.62)$$

• ...  
 • ideale Flüssigkeit:  $\eta, \eta' = 0 \rightarrow$  Eulergleichungen

Anw. Dyn. von Gasen

• Flüssigkeit:  $\operatorname{div} \underline{v} \approx 0$  (in guter Näherung inkompressibel)

• Randbedingungen:

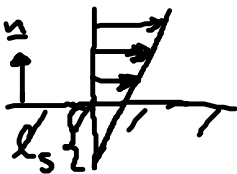
(i) haftend:

$$\underline{v}|_{\text{Rand}} = 0 \quad (3.63)$$

„glatte“, „homogene“ Oberflächen

(ii) mit „Slip“-Länge  $l_s$ :

(3.64)



Normalgeschw.:  $v_n = 0$

Tangentialgeschw.:  $(v_t - l_s n \cdot \nabla v_t)|_{\text{Rand}} = 0$

Realisierung: strukturierte Oberflächen (auf Nanometer-Skala)

- mit Polymeren beschieden

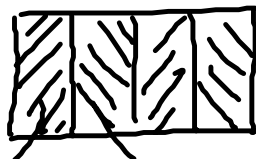


- Nadeln



Bsp. Folie

- chemisch strukturiert  $\rightarrow$  Muster



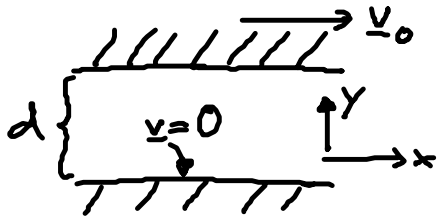
hydrophob    hydrophil

- Rauigkeit

→  $l_s = \dots 100 \mu\text{m} \dots 50 \mu\text{m}$

wichtig für: Mikro-/Nanofluidik  
Biologie  
präzise Medizin

• einfache Geometrie: Couette Strömung = Strömung, erzeugt durch bewegte Grenzfläche



$b=0, \frac{\partial p}{\partial x}=0$

Annahme:  $\underline{v} = v(y) \underline{e}_x$

→  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = 0, \& \operatorname{div} \underline{v} = 0 \xrightarrow{(3.62)} \gamma \nabla^2 \underline{v} = 0$

→  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} v(y) = 0 \rightarrow v(y) = v_0 \frac{y}{d} \quad (3.65)$

Spannungstensor:  $\underline{T} = 2\gamma \underline{A}$

→ Kraft pro Flächeneinheit:

$T_{xy} = 2 \frac{\partial v(y)}{\partial y} = 2 \gamma \frac{v_0}{d} \quad (3.66)$

Kraft-  
richtig      Flächen-  
normale      ... Meßvorschrift  
für Scherviskosität  
 $\gamma!$

„Prinzip Rheometers“

• Poiseuille-Strömung: s. Übung

• Viskositäten  $\gamma, \gamma'$ :

Einheit:  $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \cdot \frac{\text{Länge}}{\text{Geschw}} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{Ns}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}} = 10 \frac{\text{g}}{\text{cms}}$   
 $(3.66) \rightarrow \quad \quad \quad = 10 \text{ P (oise)}$

Werte für  $\gamma$ : s. Folie

### 3.11 Die Reynoldszahl

- NS-Gln.: keine inhärente Längenskala (außer Molekülgröße)
  - NS-Gln. sind skaleninvariant (gültig auf Längen  $\geq 10\text{nm}$ )
  - $\hat{=}$  Physik ist auf allen Skalen die Gleiche
  - Ähnlichkeitsprinzip: Auto  $\leftrightarrow$  Windkanal



- NS-Gln. mit  $\text{div } \underline{v} = 0$ ,  $\underline{b} = 0$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} \quad (3.67)$$

mit  $a$  ... charakt. Länge [Kanalbreite, Teilchenradius]  
 $v_0$  ... " Geschw. [Fließgeschw., Driftgeschw.]  
 $\Delta p$  ... " Druckabfall

→ Skalierung auf einheitslose Größen:

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{a/v_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

o.B. →  $\text{Re} \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v} \right) = -\frac{1}{2} \text{Eu} \text{Re} \tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nabla}^2 \tilde{v} \quad (3.68)$

Reynoldszahl:  $\text{Re} = \frac{\rho a v_0}{\eta} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{viskose Kräfte}} = \frac{\rho v_0^2 / a}{\eta v_0 / a^2} \quad (3.69)$

Eulerzahl:  $\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \frac{\text{Druckkräfte}}{\text{Trägheitskräfte}}$

→ Ähnlichkeitsprinzip:

Systeme mit gleicher  $\text{Re}$  &  $\text{Eu}$  verhalten sich gleich! (3.70)

• Einteilung:

$\text{Re} < 1$ : laminar, gleichförmiger Fluss

Reibung dominiert ( $\rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} < \eta \nabla^2 \underline{v}$ )

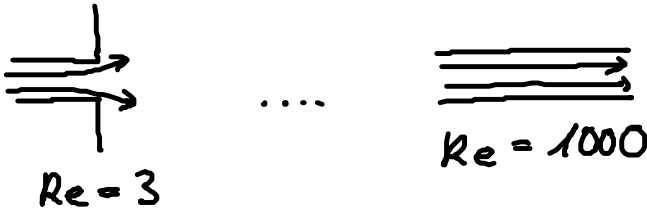
vernachlässige  $\rho \frac{d\underline{v}}{dt}$  auf Zeit  $a/v_0$  für  $\text{Re} \ll 1$ !

Bsp: - Strömung um Kugel  
 - Tropf geschildert

$Re > 1$ : Turbulenz, Trägheit dominiert

Bsp: Kaffeetasse

• Übergang zur Turbulenz: real, Geometrie abhängig



• Schwimmede Organismen:

30m Wal,  $v_0 = 10 \frac{m}{s} \rightarrow Re \approx 3 \cdot 10^8$

1µm Bakterie,  $v_0 = 30 \frac{\mu m}{s} \rightarrow Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$

• kritische viskose Kraft:

$$\frac{\eta \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]}{\rho \left[ \frac{kg}{m^3} \right]} \boxed{F_{krit} = \frac{\eta^2}{\rho}} \quad (3.74) \implies \frac{\text{äußere Kraft } F}{F_{krit}} = \begin{cases} \ll 1, \text{ laminar} \\ \gg 1, \text{ Turbulenz} \end{cases}$$

konsistent mit  $Re$ ?

$$\frac{\text{Reibungskraft} \sim \eta a v_0}{\eta^2 / \rho} = Re \gtrsim \frac{\text{Trägheitskraft} \sim \rho v^2 a^2}{\eta^2 / \rho} = Re^2 \text{ für } Re \lesssim 1$$

Bsp: Tabelle s. Folie

insbesondere: Zelle:  $F \propto 1/\mu$

$\rightarrow$  dominiert durch Reibung