

$$\text{NS-Gl.} \quad \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla (\text{div} \underline{v}) + \underline{g}_b \quad (3.62)$$

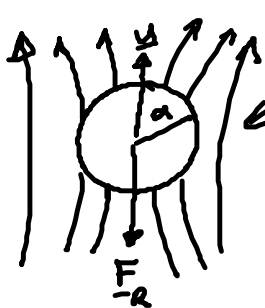
3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

• konstantes T: nur NS-Gln., keine Energiebilanz nötig!

• Motivation:

(1) hydrodynam. Mode der NS-Gln. = Störungen um homogenen GG-Zustand

(2) Stokes Reibung: $\underline{F}_R = -6\pi\eta a \underline{u}$



mit Kugel mit bewegtes statisches Geschw. profil!

↔ Gültigkeit?

• Zerlegungssatz für Vektorfeld \underline{v} : o. B.

$\underline{v}(\underline{x}, t)$ ist bestimmt durch seine Wirbel $\text{rot} \underline{v}$, seine Quellen $\text{div} \underline{v}$ und ein Anteil \underline{v}_R mit $\text{div} \underline{v}_R = \text{rot} \underline{v}_R = 0$, um die Randbed. zu erfüllen

a) Wirbel:

• Voraussetzung: $Re \ll 1 \leftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ } Linearisierung
in \underline{v} & \underline{g}

$$\underline{g} = \underline{g}_0 + \delta \underline{g} \approx \underline{g}_0$$

mit $\text{rot}(3.52)$ & $\text{rot } \underline{v} \dots = 0$

$$\rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{S_0} \nabla^2\right) \text{rot } \underline{v} = \text{rot } \underline{b}} \quad (3.72)$$

... Diffusionsgleichung für Wirbel/Vortizität

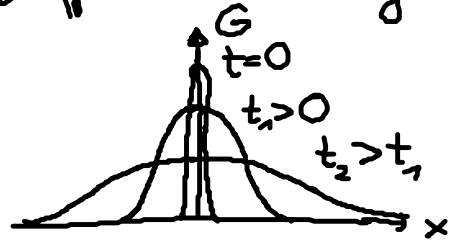
$\frac{\nu}{S_0}$... Diffusionskonstante für Wirbel

• Greensche Fkt.: $\text{rot } \underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0) \delta(t) \hat{v}$, $|\hat{v}|=1$
 ... bei $t=0$ initiierte „pkt. förmige“ Wirbel

Lsg. von (3.72)
 o.B. \rightarrow

$$\boxed{G(\underline{x}-\underline{x}_0, t) = \frac{\hat{v}}{(4\pi \frac{\nu}{S_0} t)^{3/2}} e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\nu/S_0 t}}}$$
 (3.73)

... diffusive Ausbreitung des pkt. Wirbels



mit $\lim_{t \rightarrow 0} G(\underline{x}-\underline{x}_0, t) = \hat{v} \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$
 Normierung: $\int G(\underline{x}-\underline{x}_0, t) d^3x = \hat{v}$, $t \geq 0$ } (3.74)

• Folgerung:
 mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels
 = mittleres Abstandsquadrat der Urvortizität von \underline{x}_0

$$\boxed{\langle (\underline{x}-\underline{x}_0)^2 \rangle = \int (\underline{x}-\underline{x}_0)^2 G(\underline{x}-\underline{x}_0, t) d^3x = 6 \frac{\nu}{S_0} t}$$
 (3.75)

2x Raumdimension
 Diffusionskonstante
 diffusive Ausbreitung

Beweis: Übung

hydrodynam. Zeitskala:
mit l_H ... charakt. Länge

$$\rightarrow \boxed{\tau_H = \frac{l_H^2}{6\nu/s_0}} \quad (3.76)$$

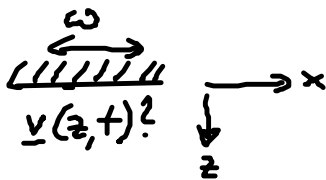
Bsp: $l_H^2 = (1\mu\text{m})^2$, $\nu = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$, $s_0 = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$\rightarrow \tau_H = 10^{-7} \text{ s !}$$

• planare Geometrie (1):

$$\boxed{\text{rot } \underline{b} = S(z-z_0) S(t) \hat{z} \iff G(z-z_0, t) = \frac{\hat{z}}{\sqrt{4\pi \frac{\nu}{s_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\nu/s_0 t}} \quad (3.77)}$$

• planare Geometrie (2):



$$\underline{v} = v(z,t) \underline{e}_x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } \underline{v} = 0, \underline{k} = 0 \\ p = \text{konstant} \end{array} \right\} \text{ in (3.62)}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{s_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(z,t) = 0} \quad (3.78)$$

Ansatz: $v(z,t) = v(\omega, z) e^{i\omega t}$ in (3.78)

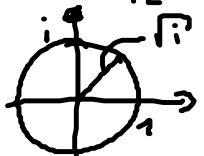
$$\rightarrow \left(i\omega - \frac{\nu}{s_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v(\omega, z) = 0 \quad (3.79)$$

$$\rightarrow v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\sqrt{i\omega \frac{s_0}{\nu}} z}$$

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$\boxed{v(\omega, z) = v(\omega, 0) e^{-\frac{(1+i)z}{S}}} \quad (3.80)$$

exp. Abfall Oszillation



Eindringtiefe der Oszillation.

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega s_0}}} \quad (3.81)$$

$$\begin{array}{l} S \rightarrow \infty, \omega \rightarrow 0 \\ S \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty \end{array} \quad \begin{array}{l} \circ \circ \\ \circ \circ \end{array}$$

• planare Geometrie (2):

$$\underline{v} = v(z, t) \underline{e}_x$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{v_0, t > 0} \\ \text{//////} \\ v(z, t)? \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow x \\ \downarrow z \end{array}$$

Rand bed.:

$$(1) v(0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ v_0, & t > 0 \end{cases}$$

$$(2) v(z, 0) = 0, \quad z > 0$$

Lsg: Superpositionsprinzip!

Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z, t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \underbrace{2\Theta(-z_0)}_{\text{Stuf fkt.}} G(z-z_0, t) \quad (3.82)$$

$$\hookrightarrow \text{Stuf fkt.: } \Theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0 < 0$]

denn: erfüllt Rand bed.

$$v(0, t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 2\Theta(-z_0) G(-z_0, t) \stackrel{t > 0}{=} v_0 \quad \checkmark$$

- Normierung von G
- Symmetrie bezgl. $z_0 = 0$

$$v(z, 0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 2\Theta(-z_0) \delta(z-z_0) = v_0 2\Theta(-z) \quad \checkmark$$

$$\text{also: } v(z, t) \stackrel{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^0 G(z-z_0, t) dz_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{\nu}{s_0} t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\nu \frac{\nu}{s_0} t}}$$

$$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\nu \frac{\nu}{s_0} t}}$$

$$du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\nu \frac{\nu}{s_0} t}}$$

$$v(z, t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{\sqrt{4\nu \frac{\nu}{s_0} t}}}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (3.84)$$

$$(1) z \gg \sqrt{4\nu \frac{\nu}{s_0} t} : v(z, t) = 0$$

$$(2) z \ll \quad \quad \quad : v(z, t) = v_0$$

→ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\nu \frac{\nu}{s_0}} \approx \tau_H$!!

→ $\tau > \tau_H$... Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw. profil

• hydrodynamische Moden:

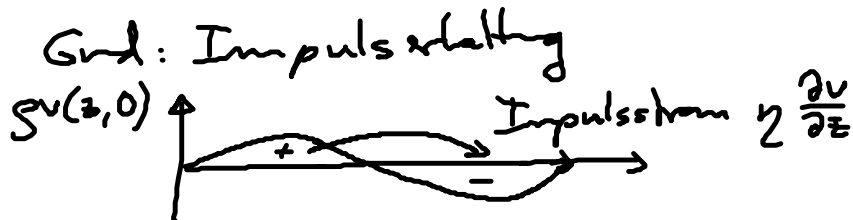
Transversalwellen: $\underline{v} = v(z, t) \underline{e}_x$ mit $v(z, t) = v(k, \omega) e^{-\gamma t + ikz}$
 $[\underline{e}_x \perp \underline{e}_z]$

in (3.78) $\rightarrow (-\gamma + \frac{\eta}{\rho_0} k^2) v(k, \omega) = 0$

$\rightarrow \boxed{\gamma(k) = \frac{\eta}{\rho_0} k^2} \quad (3.86)$

... Dispersionsrelation für Schermoden
 γ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

$\gamma \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0!$
 „unendliche Lebensdauer“ für
 hydrodynam. Mode für $k \rightarrow 0$



b) Quellen

$\text{div } \underline{v} \neq 0 \rightarrow \underline{v} = v(x, t) \underline{e}_x$... Longitudinalwelle
 = Schallwelle

Geschw.: $c = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \Big|_s \right)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für Flüssig-
 Leit
 isentrope
 Kompressibilität

also: $1 \mu\text{m}$ in $c^{-1} \cdot 1 \mu\text{m} = 1 \text{ns}!$
 schneller als Scherwellen!

benötigt Masse-/Energiebilanz \rightarrow Kap. 3.13