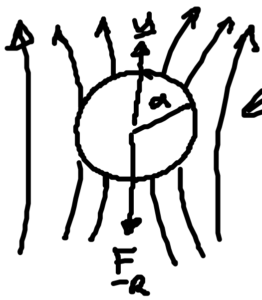
NS-Gl. $\rho\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}+\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}\right)=-\underline{\nabla}p+\eta\,\underline{\nabla}^2\underline{v}+(\eta+\eta')\,\underline{\nabla}\,(\mathrm{div}\,\underline{v})+\rho\,\underline{b}$ (3.62)

3.12 Ausbreitung von Störungen für konstante Temperatur

- konstantes T: nur NS-Gln., keine Energiebilanz nötig!
- Motivation:
  - (1) hydrodynam. Moden der NS-Gln. = Störungen um homogenen GG-Zustand
  - (2) Stokes Reibung: $\underline{F}_R=-6\pi\eta a\,\underline{u}$



mit Kugel mitbewegtes statisches Geschw.profil!

$\longleftrightarrow$ Gültigkeit?

- Zerlegungssatz für Vektorfeld $\underline{v}$: o.B.

$\boxed{\text{$\underline{v}(\underline{x},t)$ ist bestimmt durch seine Wirbel rot $\underline{v}$, seine Quellen div $\underline{v}$ und ein Anteil $\underline{v}_R$ mit div $\underline{v}_R$ = rot $\underline{v}_R$ = 0, um die Randbed. zu erfüllen}}$

a) Wirbel:

- Voraussetzung: $Re \ll 1 \longleftrightarrow$ vernachlässige $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{v}$; $\rho=\rho_0+\delta\rho\approx\rho_0$ $\Big\}$ Linearisierung in $\underline{v}$ & ρ

mit rot (3.62) & rot $\underline{\nabla} \ldots = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0}\underline{\nabla}^2\right)\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{rot}\underline{b}} \quad (3.72)$$

... Diffusionsgleichung für Wirbel / Vortizität

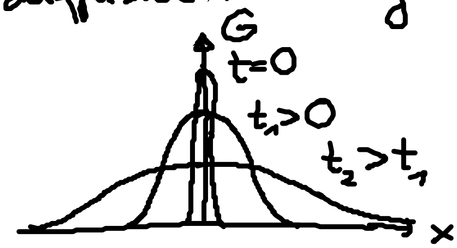
$\frac{\eta}{\rho_0}$ ... Diffusionskonstante für Wirbel

- Greensche Fkt.: $\operatorname{rot}\underline{b} = \delta(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\nu}}$, $|\hat{\underline{\nu}}| = 1$

... bei $t=0$ initiierter „pkt. förmiger" Wirbel

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{\text{Lsg. von (3.72)}} \boxed{G(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \frac{\hat{\underline{\nu}}}{\left(4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t\right)^{3/2}}\,e^{-\frac{(\underline{x}-\underline{x}_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}}} \quad (3.73)$$

... diffusive Ausbreitung des Pkt. Wirbels



$$\left.\begin{aligned} &\text{mit } \lim_{t\to 0} \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t) = \hat{\underline{\nu}}\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0) \\ &\text{Normierung: } \int \underline{G}(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = \hat{\underline{\nu}} \quad , t\geq 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.74)$$

- Folgerung:

mittleres Verschiebungsquadrat des Wirbels

= mittleres Abstandsquadrat der Verwirbelung von $\underline{x}_0$

$$\boxed{\langle(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\rangle = \int(\underline{x}-\underline{x}_0)^2\, G(\underline{x}-\underline{x}_0,t)\,d^3x = 6\,\frac{\eta}{\rho_0}\,t} \quad (3.75)$$

2x Raumdimension

Diffusionskonstante

diffusive Ausbreitung

Beweis: Übung

hydrodynam. Zeitskala:
mit ℓ_H ... charakt. Länge

$$\longrightarrow \boxed{\tau_H = \frac{\ell_H^2}{6\eta/\varrho_0}} \quad (3.76)$$

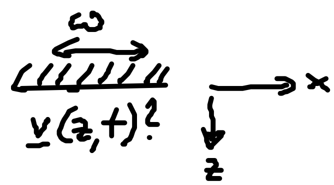
Bsp: $\ell_H^2 = (1\mu m)^2$, $\eta = 10^{-3}\frac{kg}{ms}$, $\varrho_0 = 1\frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$

$$\longrightarrow \tau_H = 10^{-7}s \; !$$

• planare Geometrie (1):

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\underline{b} = \delta(z-z_0)\,\delta(t)\,\hat{\underline{\gamma}} \longleftrightarrow G(z-z_0,t) = \frac{\hat{\underline{\gamma}}}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\varrho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\varrho_0\, t}}} \quad (3.77)$$

• planare Geometrie (2):



$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$

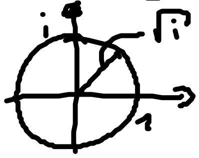
$\left.\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\underline{v} = 0,\ \underline{b} = 0 \\ p = \text{konstant} \end{array}\right\}$ in (3.62) $\quad \boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\varrho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(z,t) = 0} \quad (3.78)$

Ansatz: $v(z,t) = v(\omega,z)\,e^{i\omega t}$ in (3.78)

$$\longrightarrow \left(i\omega - \frac{\eta}{\varrho_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(\omega,z) = 0 \quad (3.79)$$

$$\longrightarrow v(\omega,z) = v(\omega,0)\,e^{-\sqrt{i\omega\frac{\varrho_0}{\eta}}\,z}$$

$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ $\quad \boxed{v(\omega,z) = v(\omega,0)\,e^{-(1+i)\,z/\delta}} \quad (3.80)$



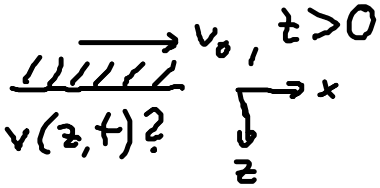
exp. Abfall $\quad$ Oszillation

Eindringtiefe der Oszillation: $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\varrho_0}}} \quad (3.81)$

$\delta \to \infty$, $\omega \to 0$!!
$\delta \to 0$, $\omega \to \infty$

· planare Geometrie (3):

$\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$



Randbed.:

(1) $v(0,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ v_0, & t>0 \end{cases}$

(2) $v(z,0) = 0, \quad z>0$

Lsg: Superpositionsprinzip!

Lsg. von (3.78) für $z \neq z_0$

$$v(z,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\underbrace{\Theta(-z_0)}\, G(z-z_0,t) \qquad (3.82)$$

↳ Stufenfkt.: $\Theta(z) = \begin{cases} 1, & z>0 \\ 0, & z<0 \end{cases}$ (3.83)

[Überlagerung 1D Punktquellen bei $z_0<0$]

denn: erfüllt Randbed.

$$v(0,t) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\Theta(-z_0)\, G(-z_0,t) \overset{t>0}{=} v_0 \quad ✓$$

- Normierung von G
- Symmetrie bzgl. $z_0=0$

$$v(z,0) = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 \; 2\Theta(-z_0)\, \delta(z-z_0) = v_0\, 2\Theta(-z) \quad ✓$$

also: $$v(z,t) \overset{(3.82)}{=} 2v_0 \int_{-\infty}^{0} \underbrace{G(z-z_0,t)}_{=\frac{1}{\sqrt{4\pi\frac{\eta}{\rho_0}t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4\eta/\rho_0 t}}} dz_0$$

$u = \frac{z-z_0}{\sqrt{4\eta/\rho_0 t}}$ ⟶

$du = -\frac{dz_0}{\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}$

$$\boxed{v(z,t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} \int_{z/\sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}}^{\infty} e^{-u^2}\, du} \qquad (3.84)$$

(1) $z \gg \sqrt{4\frac{\eta}{\rho_0}t}$: $v(z,t) = 0$

(2) $z \ll$ 〃 : $v(z,t) = v_0$

⟶ v_0 bei z spürbar nach Zeit $\frac{z^2}{4\eta/\rho_0} \hat{=} \tau_H$!!

⟶ $\tau > \tau_H$ … Gültigkeitsbereich für stationäres Geschw.profil

· **hydrodynamische Moden:**

Transversalwellen: $\underline{v} = v(z,t)\,\underline{e}_x$ mit $v(z,t) = v(k,\omega)\, e^{-\xi t + ikz}$

$[\underline{e}_x \perp \underline{e}_z]$

$$\xrightarrow{\text{in (3.78)}} \quad \left(-\xi + \frac{\eta}{\rho_0} k^2\right) v(k,\omega) = 0$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\xi(k) = \frac{\eta}{\rho_0} k^2} \quad (3.86)$$

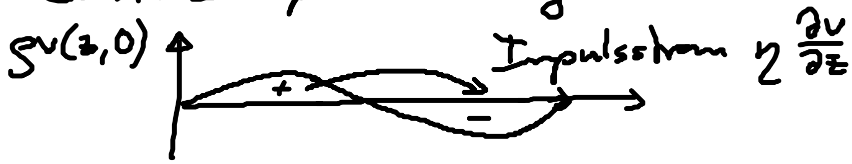
... Dispersionsrelation für Scher-moden

ξ^{-1} ... Relaxationszeit für Welle e^{ikz}

$\xi \to 0$ für $k \to 0$!

„unendliche Lebensdauer" für hydrodynam. Mode für $k \to 0$

Grund: Impulserhaltung



b) **Quellen**

$\operatorname{div} \underline{v} \neq 0 \longrightarrow \underline{v} = v(x,t)\,\underline{e}_x$ ... Longitudinalwelle = Schallwelle

Geschw.: $c = \left(\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_s}_{\text{isentrope Kompressibilität}}\right)^{-1/2} \approx 10^3 \frac{m}{s}$ für Flüssigkeiten

also: $1\,\mu m$ in $c^{-1} \cdot 1\,\mu m = 1\,ns$!

schneller als Scherwellen!

Benötigt Masse-/Energiebilanz ⟶ Kap. 3.13