

### 3.13 Hydrodynamische Moden

• Motivation:

5 Erhaltungssätze (Masse, Impuls, Energie)

→ 5 hydrodynam. Moden

• Weg: (i) linearisierte Bewegungsgln. (3.15), (3.62), (3.65)

um homogene GG-Zustand:

$$\begin{array}{l} \rho \rightarrow \rho + \delta\rho(\underline{x}, t) \\ \underline{v}(\underline{x}, t) \\ T \rightarrow T + \delta T(\underline{x}, t) \end{array} \quad (3.87)$$

↑ statt innere Energie!

(ii) homogener GG-Zustand:  $\rho, T$

• Erster Satz von Bewegungsgl.: mit  $\underline{b} = 0, \underline{v}_w = 0$

$$(3.15) \underline{g} \rightarrow \underline{g} + \underline{f}_g \quad \frac{\partial \underline{g}}{\partial t} + \underline{g} \operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad (3.88)$$

$$(3.62) \frac{\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}}{\text{multipl.}} \underline{g} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla \operatorname{div} \underline{v} \quad (3.89)$$

$$(3.65) \frac{\underline{v} \cdot \nabla u}{\text{multipl.}} \underline{g} \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \underline{v} + \kappa \nabla^2 T \quad (3.90)$$

• Zerlegung:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}_l(\underline{x}, t) + \underline{v}_t(\underline{x}, t) \quad \text{mit } \operatorname{div} \underline{v}_t = 0 \quad (3.91)$$

$$\operatorname{rot} \underline{v}_l = 0$$

↑  
longitudinaler Anteil

↑  
transversaler Anteil

a) Transversalwellen:

• Gleichung für  $\underline{v}_t$ : wegen  $\operatorname{rot} \nabla p = 0$  und  $\operatorname{div} \underline{v}_t = 0$

$$(3.89) \rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \right) \underline{v}_t = 0 \quad (3.92)$$

• Sclermoden: s. Kap. 2.12 & keine Kopplung an  $\underline{g}_g, \underline{g}_T!$

$$\underline{v}_t = \underline{v}_t(\underline{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\underline{k} \cdot \underline{x}}$$

$$\text{mit } \underline{v}_t(\underline{k}, \omega) \perp \underline{k} \iff \operatorname{div} \underline{v}_t \sim \underline{v}_t \cdot \underline{k} = 0$$

$$\text{in (3.92)} \rightarrow \frac{\omega}{\rho} \underline{v}_t(\underline{k}) = \frac{\eta}{\rho} \underline{k}^2 \underline{v}_t(\underline{k}) \quad (3.93)$$

... 2 Sclermoden für  $2 \underline{v}_t(\underline{k}, \omega) \perp \underline{k}!$

reine diffusive Mode (keine Propagation)

b) Longitudinalmoden:

• wichtige thermodynamische Relationen

• Umformung  $\rho = \rho(p, s)$ : [alle Größen als Fkt. von  $T, \rho$ ]

(1) Impulsbilanz:  $\underline{\nabla} p = \frac{\partial p}{\partial s} \underline{\nabla} s + \frac{\partial p}{\partial T} \underline{\nabla} T$  (3.104)

$= \underbrace{\frac{\partial p}{\partial s}}_{-\rho \frac{\partial s}{\partial s}} \underline{\nabla} s + \frac{\partial p}{\partial T} \underline{\nabla} T$  (3.93)

(2)  $\underline{\nabla}^2 \underline{v}_L = \underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v}_L - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v}_L = \underline{\nabla} \operatorname{div} \underline{v}_L$  (3.105)

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v}_L = 0$

(3) in Energiebilanz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \underline{v}_L = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \underline{v}_L$$

$\frac{\partial u}{\partial s} = c_v$  (3.95)

(3.100)  $= \left( \frac{p}{\rho^2} + T \frac{\partial s}{\partial \rho} \right) (-\rho) \operatorname{div} \underline{v}_L$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \underline{v}_L = -T \frac{\partial s}{\partial s} \operatorname{div} \underline{v}_L + c_v \frac{\partial T}{\partial t}$  (3.106)

(3.88)  $\rightarrow \frac{\partial s}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{v}_L = 0$  (3.107)

(3.83) mit (3.106)  $\rightarrow \frac{\partial v_L}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \underline{\nabla} s - \rho \frac{\partial s}{\partial s} \underline{\nabla} T - \frac{2\gamma + \gamma'}{\rho} \underline{\nabla}^2 \underline{v}_L = 0$  (3.108)

(3.90) mit (3.106)  $\rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{T \rho}{c_v} \frac{\partial s}{\partial s} \operatorname{div} \underline{v}_L - \frac{\kappa}{\rho c_v} \underline{\nabla}^2 T = 0$  (3.109)

... 3 hydrodynam. Moden aus Kopplung  $s, v_L, T$

• Modenanalyse:

Ansatz ebener

Wellen:

$$\left. \begin{aligned} s(x, t) &= s_g(\underline{k}, \underline{y}) e^{-j\omega t + i \underline{k} \cdot \underline{x}} \\ v_L(x, t) &= v(k, \underline{y}) \frac{\underline{k}}{k} e^{-j\omega t + i \underline{k} \cdot \underline{x}}, \operatorname{rot} \underline{v}_L = 0 \\ T(x, t) &= T(k, \underline{y}) e^{-j\omega t + i \underline{k} \cdot \underline{x}} \end{aligned} \right\} (3.110)$$

• mit (3.110) in (3.107-109):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\xi & ik\eta & 0 \\ ik\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} & -\xi + k^2\frac{2\eta^2}{\rho} & -ik\eta\frac{\partial s}{\partial y} \\ 0 & -ik\frac{T_0}{c_v}\frac{\partial s}{\partial y} & -\xi + \frac{\kappa}{\rho}k^2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{D}} \begin{bmatrix} \delta s(b, \xi) \\ v_L(k, \xi) \\ \delta T(k, \xi) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.111)$$

$\mathcal{D}$ ... dynamische Matrix

nicht triviale Lsg:

$$\text{Det } \mathcal{D} = 0 \rightarrow \xi = \xi(k)$$

... Dispersionsrelation

„etwas kompliziert“  $\rightarrow$  in Schritte

• ohne Dissipation:  $\kappa = \eta = \eta' = 0 \rightarrow$  keine Dämpfung

(1) Schallwellen:

$$(3.111) \rightarrow \left. \begin{aligned} \delta T &= -\frac{ik}{\rho} \frac{T_0}{c_v} \frac{\partial s}{\partial s} v_L \\ \delta s &= \frac{ik}{\rho} \delta v_L \end{aligned} \right\} \text{ in mittlere Gl. von (3.111)}$$

$$\text{d.B.} \rightarrow \underbrace{(\xi^2 + c^2 k^2)}_{=0} v_L = 0$$

$$\rightarrow \xi_{\text{Sch}} = \pm i c k, \quad c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial s}}_s = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}} \quad (3.112)$$

- Schallwelle mit Geschw.  $c$ :  $v_L \frac{d}{dt} e^{i(\pm c k t + s \cdot x)}$   
 [nach rechts bzw. links laufend]  $\uparrow$   
 EV von  $\mathcal{D}$

-  $c \sim \frac{1}{\sqrt{\kappa_s}}$  mit  $\kappa_s$ ... isentrope Kompressibilität

$$\text{[Beweis: } -\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \xi - \frac{k^2}{\rho} \frac{T_0^2}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial s}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \xi^2 = -k^2 \left[ \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{T_0^2}{c_v} \left(\frac{\partial s}{\partial s}\right)^2 \right]$$

$$\stackrel{(3.102)}{=} -k^2 \frac{\partial p}{\partial s} \frac{c_p}{c_v} \stackrel{(3.103)}{=} -k^2 \frac{\partial p}{\partial s} \Big|_s \text{ gel}]$$

(2) weiterer EV von  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{pmatrix} \rho g \\ 0 \\ \sigma T \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in (3.111)}} \boxed{\xi_5 = 0} \quad (3.113) \quad \rightarrow \xi_5 = O(k^2)!$$

$$\frac{1}{s} i k \left( \frac{\partial p}{\partial s} \xi_5 + \underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}}_{-\rho \frac{\partial \xi_5}{\partial s}} \sigma T \right) \sim dp = 0$$

$\rightarrow$  statische Mode  $\xi_5 = 0$  mit  $dp = 0$

• mit Dissipation:

(2) diffusive Wärmemode:

Ansatz:  $\xi_5 = \underbrace{D_T}_{\text{Dämpfung}} k^2$  in  $\text{Det } \mathcal{D} = 0$

$D_T \sim k^2!$

2 Terme führende Ordnung  $[O(k^4)]$

o.B.  $\rightarrow (D_T - \frac{\kappa}{\rho c_p}) k^4 = 0$

$\rightarrow \boxed{\xi_5 = D_T k^2 \text{ mit } D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p}} \quad (3.114)$

- rein diffusive Mode für Wärmeausbreitung

$D_T$  ... Wärmediffusionskoeffizient

-  $c_p$  statt  $c_v$  durch Kopplung an  $\xi_3$  bzw.  $\text{div } u_2$

(1) propagierende Schallwelle mit Dämpfung.

Ansatz:  $\xi_{3/4} = \pm i c k + \frac{1}{2} T k^2$  in  $\text{Det } \mathcal{D} = 0$

2 Terme führende Ordnung  $[O(k^4)]$

o.B.  $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_{3/4} &= \pm i c k + \frac{1}{2} T k^2 \\ \text{mit } c &= \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_s} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_s}} \\ T &= \underbrace{D_T \left( \frac{c_p}{c_v} - 1 \right)}_{\text{Wärmediffusion}} + \underbrace{\frac{2\eta + \eta'}{s}}_{\text{Volumenviskosität}} \end{aligned}}$$

Dämpfung  
aufgrund

Wärmediffusion

Volumenviskosität