4. Stokes Gleichungen

Navier Stokes: $Re\left(\frac{\partial \tilde{\underline{v}}}{\partial t} + \tilde{\underline{v}} \cdot \tilde{\underline{\nabla}}\, \tilde{\underline{v}}\right) = -\frac{1}{2} Eu \cdot Re\, \tilde{\underline{\nabla}}\, \tilde{p} + \tilde{\underline{\nabla}}^2 \tilde{\underline{v}}$ (3.68)
(dim.-los)

Untersuche $Re = \frac{\rho \cdot a \cdot v_0}{\eta} \ll 1 \longrightarrow \underline{v} \cdot \underline{\nabla}\, \underline{v}$ vernachlässigen

$\Longleftrightarrow$ auf Zeiten $t \gg \tau_H = \frac{l_H^2}{6\eta/\rho}$ (3.76) $\quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ —— " ——

$\longrightarrow$ stat. Geschw.-Feld auf Länge l_H (s. Kap. 3.11)

Weiterhin gilt $\operatorname{div} \underline{v} = 0 \Longleftrightarrow$ inkompressibel

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= -\underline{\nabla}\, p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (+\rho\, \underline{b}) \\ 0 &= \operatorname{div} \underline{v} \end{aligned}}$$

Stokes-Gleichungen
creeping-flow-Gl.
(4.1)

4.1. Extremalprinzip: wichtiges Prinzip der Physik

z.B. $\delta S = \delta \int L\, dt = 0 \longrightarrow$ Lagrange-Gleichungen

hier: dissipierte Energie pro Zeiteinheit $W = T \cdot \dot{S}$

$$W \overset{(3.43)}{=\!=} \int Sp\, \underline{\underline{T}}'\, \underline{\underline{A}}\, d^3x \underset{\underline{\underline{T}}' = 2\eta \underline{\underline{A}}\ (3.56)}{=} 2\eta \int Sp\, \underline{\underline{A}}^2 d^3x = 2\eta \int A_{ij}^2\, d^3x$$

Extremalprinzip: unter der Nebenbedingung $\operatorname{div} \underline{v} = 0$:

$$\boxed{\delta\left(W - 2 \int_V p \operatorname{div} \underline{v}\, d^3x\right) = 0 \quad \underset{\text{„Übung"}}{\Longleftrightarrow} \quad 0 = -\underline{\nabla}\, p + \eta\, \underline{\nabla}^2 \underline{v} \quad (4.3)}$$

Druck p: Lagrangeparameter

R.B.: z.B. $\underline{v} = 0$
oder $\underline{\underline{T}}\, \underline{n}|_{\partial V} = 0$ Oberfläche kräftefrei

$\longrightarrow$ stationäre Strömungsprofile stellen sich so ein, dass W ein Extremum annimmt!

4.3. Biharmonische Gleichungen

Herleitung:

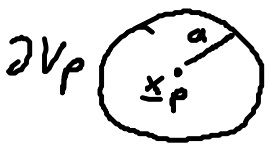
$$\mathrm{div}\,(0 = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}) \hat{=} -\partial_i \partial_i p + \eta \partial_i \partial_j \partial_j v_i \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\nabla}^2 p = 0 \quad (4.4a)}$$

$$\underline{\nabla}^2 (0 = -\underline{\nabla} p + \eta \underline{\nabla}^2 \underline{v}) = -\partial_k \partial_k \partial_i p + \eta \partial_k \partial_k \partial_j \partial_j v_i \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\nabla}^2 \underline{\nabla}^2 \underline{v} = 0 \quad (4.4b)}$$

$\leadsto$ Separate Gl. für $\underline{v}$ und p!

Einschub:

Geometrie:



Kugel

$$\boxed{\frac{1}{4\pi a^2} \oint_{\partial V_p} \underline{v}(\underline{x})\, df = \left(1 + \frac{1}{6} a^2 \underline{\nabla}_p^2\right) \underline{v}(\underline{x}_p)}$$

Ableitung nach $\underline{x}_p$

mit $\underline{v}(\underline{x})$ Lösung des Stokes-Gl.

(4.5)

Beweis: verwendet (4.4b)

(1) Taylorentw. von $\underline{v}$: $\left(f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \right)$
(mit $\Delta \underline{x}_p \equiv \underline{x} - \underline{x}_p$)

$$\underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}(\underline{x}_p) + \Delta \underline{x}_p \cdot \underline{\nabla}_p \underline{v}(\underline{x}_p) + \frac{1}{2}(\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p) \cdot\cdot (\underline{\nabla}_p \otimes \underline{\nabla}_p) \underline{v}(\underline{x}_p) + \ldots + \frac{1}{n!} (\Delta \underline{x}_p)^n \cdot\cdot \underline{\nabla}_p^n \underline{v}(\underline{x}_p)$$

(2) Einsetzen in Integral! $\to$ in: $\frac{1}{4\pi a^2} \int \underline{v}(\underline{x})\, df$

(i) $\int (\Delta \underline{x}_p)^n\, df = 0$ $\quad n$ ungerade ($\Delta \underline{x}_p$ und $-\Delta \underline{x}_p$ kommen vor)

(ii) $\underbrace{\int (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p)\, df}_{= c\,\underline{\underline{1}}} = \frac{4\pi}{3} a^2 \underline{\underline{1}}$ $\qquad \underline{a} \otimes \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 \\ a_2 a_1 & \ldots \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{Sp(\ldots)} 3c = |\Delta \underline{x}_p|^2 \int df = a^2 \int df = 4\pi a^2 \Rightarrow c = \frac{4\pi}{3} a^2$$

(iii) $\int (\Delta \underline{x}_p \otimes \Delta \underline{x}_p \otimes \ldots)\, df = ?$ $\quad n$ gerade
$\qquad$ n-mal

z.B. für $n = 4$: $\quad \ldots \underline{\nabla}_p^2 \underline{\nabla}_p^2 \underline{v}(\underline{x}_p) \overset{(4.4b)}{=} 0$

q.e.d.

4.3. Oseen-Tensor

: (4.1): Linear in $\underline{v}$ und p → Methode der Green'schen Funktion (Superpositionsprinzip)

Suche $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$ für: Lösung für (4.1) für geg. $\varrho\underline{b}$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) &= \int d^3x' \, \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\, \varrho\underline{b}(\underline{x}') \\ p(\underline{x}) &= \int d^3x' \, \underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot \varrho\underline{b}(\underline{x}') \end{aligned}} \quad (4.6)$$

mit $\left.\begin{aligned} &\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}') : \text{Osean Tensor} \\ &\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}') : \text{Druck-Vektor} \end{aligned}\right\}$ Greensche Funktionen

N.B.: (i) $\underline{\underline{O}}$: Tensor 2. Stufe : "Vektor → Vektor"

(ii) $\underline{g}$: Vektor : "Vektor → Skalar"

Bestimmungsgln. für $\underline{\underline{O}}$ und $\underline{g}$: Einsetzen in Stokes! (4.6) in (4.1)

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 0 = \int d^3x' \left\{ -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x}-\underline{x}')\cdot\varrho\underline{b}(\underline{x}')\right] + \eta\,\underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\varrho\underline{b}(\underline{x}')\right]\right\} + \varrho\underline{b} \\ 0 = \int d^3x' \, \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}')\,\varrho\underline{b}(\underline{x}')\right] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\delta(x)\,dx = f(0)$$

wähle: $\varrho\underline{b}(\underline{x}') = \underline{e}\,\delta(x')$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\underline{\nabla}\left[\underline{g}(\underline{x})\cdot\underline{e}\right] + \eta\,\underline{\nabla}^2\left[\underline{\underline{O}}(x)\,\underline{e}\right] + \underline{e}\,\delta(\underline{x}) & \text{Vektorwertig} \\ 0 = \operatorname{div}\left[\underline{\underline{O}}(\underline{x})\,\underline{e}\right] \quad \left(\partial_i O_{ij} e_j \rightsquigarrow \partial_i O^T_{ji}\right) & \text{Skalar} \end{cases}$$

$\underline{e}$ beliebig!

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\nabla}\otimes\underline{g}(\underline{x}) - \eta\,\underline{\nabla}^2\,\underline{\underline{O}}(\underline{x}) &= \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.7a) \quad \text{Tensor} \\ \operatorname{div}\,\underline{\underline{O}}^{t}(\underline{x}) &= \underline{0} \quad (4.7b) \quad \text{Vektor} \end{aligned}}$$

Lösung für $V \to \infty$, $\underline{v}(\underline{x}\to\infty) = 0$

(i) Druck-Vektor $\underline{g}$: $\operatorname{div}\left[(4.7a)^{+}\right]$ & Verwende (4.7b)

$$\longrightarrow \underline{\nabla}^2\underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.8)$$

$$\left(\begin{aligned} \underline{\nabla}^2\,\underline{\underline{O}} &\mathrel{\hat{=}} \partial_i\partial_i\,O_{mn} \\ \operatorname{div}\left(\underline{\nabla}^2\,\underline{\underline{O}}\right)^{+} &\mathrel{\hat{=}} \partial_m\,\partial_i\partial_i\,\underbrace{O_{nm}}_{(4.7b)} = 0 \end{aligned}\right)$$

Einschub: Elektrostatik:

(4.9) $\underline{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(\underline{x})$ mit $r = |\underline{x}|$

$\frac{1}{r}$ ← Greensche Fkt. der Poisson Gl.

$\underline{\nabla}$ (4.9) & vgl. mit (4.8): $\quad \underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\frac{1}{r} \quad \sim \delta(\underline{x})$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{g}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{\underline{x}}{r^3}} \quad (4.10)$$

Dipol

(denn $\underline{\nabla}\underline{g}(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{r}$

$\to \nabla^2 \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\nabla}\,\delta(\underline{x})$)

Denn: $\underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\underline{\nabla}r$

$\partial_x r = \partial_x\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{-1}{2r}\cdot 2x = -\frac{x}{r}$

$\Rightarrow \underline{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{\underline{x}}{r^3}$

Lösung für $\varrho\underline{b} = \varrho\,\delta(\underline{x})$

(ii) (4.10) in (4.7a): $\quad -\frac{1}{4\pi}(\underline{\nabla}\otimes\underline{\nabla})\frac{1}{r} - \eta\nabla^2\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \underline{\underline{1}}\,\delta(\underline{x}) \quad (4.11)$

o. Beweis: $$\boxed{\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r}\left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{x}\otimes\underline{x}}{r^2}\right)} \quad (4.15)$$

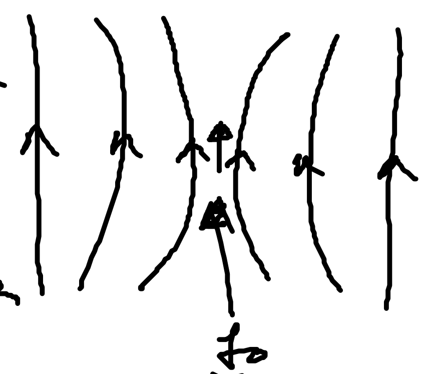
Oseen-Tensor

Ansatz: $\underline{\underline{O}}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi\eta}\left(\frac{1}{r}\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\tilde{O}}}\right) \quad (4.12)$

- z.B. Geschwindigkeitsfeld einer Punktquelle $\varrho\underline{b}(\underline{x}) = \underline{f}_0\,\delta(\underline{x}-\underline{x}_0)$

in (4.6): $\quad \boxed{\underline{v}(\underline{x}) = \underline{\underline{O}}(\underline{x}-\underline{x}_0)\,\underline{f}_0} \quad (4.16)$

Stokeslet



N.B.: • allgemein: $\underline{v}(\underline{x})$ = Superposition von Stokeslets

• wichtige Anwendung: hydrodynamische Wechselwirkungen s. Kap. 6