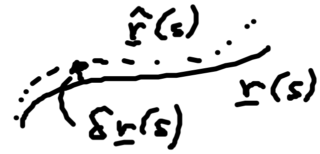
7.2 Elastohydrodynamik dünner Stäbe

b) Elastizitätstheorie:

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} k_B T l_p \int_0^L \frac{1}{R^2}\, ds \\ &= \frac{1}{2} k_B T l_p \int_0^L \left(\frac{d\hat{\underline{t}}}{ds}\right)^2 ds \quad \text{mit } \hat{\underline{t}} = \frac{d\underline{r}(s)}{ds},\ |\hat{\underline{t}}| = 1! \end{aligned}} \qquad (7.2)$$

· Biegekraft:

$$\boxed{\delta F = \int_0^L \frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} \cdot \delta \underline{r}(s)\, ds \;+\; \text{Oberflächenenergie}} \qquad (7.4)$$



$-\dfrac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)}$ … Biegekraft = − Funktionalableitung von F (pro Längeneinheit)

Bestimmung:

$$\delta F \overset{(7.2)}{=} k_B T l_p \int_0^L \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} \underbrace{\delta \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds}}_{} ds$$

$$= \delta \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = \delta \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\underline{r}(s+\varepsilon) + \underline{r}(s-\varepsilon) - 2\underline{r}(s)}{\varepsilon^2} \right)$$

Taylorentw.

$$\underline{r}(s\pm\varepsilon) = \underline{r}(s) \pm \frac{d\underline{r}}{ds}\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\varepsilon^2$$

$$= k_B T l_p \int_0^L \frac{d^2\underline{r}}{ds^2} \cdot \left(\frac{d^2}{ds^2}\delta\underline{r}\right) ds$$

Produktregel: $\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\cdot\frac{d}{ds}\delta\underline{r}\right) - \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}\cdot\frac{d}{ds}\delta\underline{r}$

$$= -k_B T l_p \int \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}\cdot\left(\frac{d}{ds}\delta\underline{r}\right) ds + k_B T l_p \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\cdot\frac{d}{ds}\delta\underline{r}\Big|_0^L$$

Produkt-regel $= k_B T l_p \int \frac{d^4\underline{r}}{ds^4}\cdot\delta\underline{r}\, ds + \underbrace{k_B T l_p \left[\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}\cdot\left(\frac{d}{ds}\delta\underline{r}\right) - \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}\cdot\delta\underline{r}\right]\Big|_0^L}_{\text{Oberflächenterm (s.u.)}}$ (7.5)

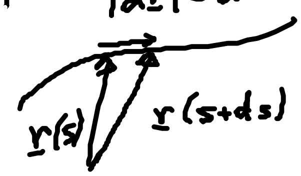
$$\longrightarrow \boxed{\frac{\delta F}{\delta\underline{r}(s)} = k_B T l_p \frac{d^4\underline{r}}{ds^4}} \quad (7.6)$$

• Führe ein Spannungskräfte:

Dynamik: $\underline{r}(s, t=0) \longrightarrow \underbrace{\underline{r}(s,t)}_{\text{Undehnbarkeit: } L = \text{const.}}$

indiziert Materiepkt.

$\longrightarrow \left|\frac{d\underline{r}}{ds}\right| = 1$ $|d\underline{r}| = ds$!!!



$\longrightarrow$ Variation mit Nebenbedingung!

$$F + F_s = \boxed{F + \frac{1}{2}\int \underbrace{\lambda(s)}_{\text{Lagrange-parameter}} \left(\frac{d\underline{r}}{ds}\right)^2 ds} \quad (7.7)$$

Deutung: F_s ... Dehnungsenergie [relativ zu $\frac{1}{2}\int\lambda(s)\,ds$]

$\boxed{\underline{\tau}(s) = \lambda(s)\frac{d\underline{r}}{ds}}$ (7.8) ... Spannung um $\left(\frac{d\underline{r}}{ds}\right)^2 = 1$ zu erfüllen

Variation:

$$\delta F_s = \int \lambda(s)\, \frac{d\underline{r}}{ds} \left(\delta \frac{d\underline{r}}{ds}\right) ds$$

$$\overset{\text{Produkt-regel}}{=} -\int \frac{d}{ds} \underbrace{\left(\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds}\right)}_{\underline{\tau}(s)} \delta\underline{r}\, ds + \underbrace{\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \delta\underline{r} \Big|_0^L}_{\text{Oberflächenterm (s.u.)}} \qquad (7.9)$$

$$\longrightarrow \boxed{-\frac{\delta F_s}{\delta \underline{r}} = \frac{d}{ds} \underline{\tau}(s)} \qquad (7.10)$$

... Spannungskraft

c) Elastohydrodynamik

- Näherung:

überdämpfte Bewegung [keine Trägheit] „resistive force theory" } lokale Reibungskraft = Biege- + Spannungskraft auf Filament

$\longrightarrow$ Bew.gln. für elastisches Filament:

$$\boxed{\begin{aligned}\left[\varsigma_{\parallel}\, \hat{\underline{t}} \otimes \hat{\underline{t}} + \varsigma_{\perp} (\underline{1} - \hat{\underline{t}} \otimes \hat{\underline{t}})\right] \frac{d\underline{r}}{dt} &= -\frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} + \frac{d}{ds} \underline{\tau}(s) \\ &= -k_B T \ell_p \frac{d^4 \underline{r}}{ds^4} + \frac{d}{ds}\left(\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds}\right)\end{aligned}} \qquad (7.11)$$

mit $\varsigma_{\parallel}, \varsigma_{\perp}$ ... Reibungskoeff. pro Längeneinheit $\parallel, \perp$ Filamentsegment [s. Kap. 4.6]

NB: (7.11) ist hochgradig nicht linear!

- freie Randbedingungen: $\longrightarrow$ $\delta \underline{r}(s)\Big|_{s=0,L}$ und $\delta \frac{d\underline{r}}{ds}\Big|_{s=0,L}$ beliebig

mit Oberflächenterme in (7.5) & (7.9)

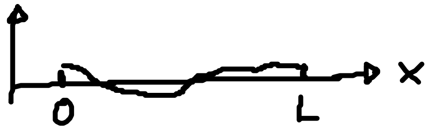
$$\boxed{\begin{aligned} &\xrightarrow{\delta \underline{r}} \quad -k_B T \ell_p \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} + \lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} = 0 \qquad (7.12a) \\ &\xrightarrow{\delta \frac{d\underline{r}}{ds}} \quad \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = 0 \qquad (7.12b)\end{aligned}}$$

Filamentenden sind frei von Kräften (a)

Drehmomenten (b)

d) <u>Linearisierung um Grundzustand:</u> $\underline{r}_0(x) = x\,\underline{e}_x$, $x = 0\ldots L$

. Monge-Darstellung:



$$\underline{r}(x) = x\,\underline{e}_x + y(x)\,\underline{e}_y$$

gültig für $|y| \ll L$

(i) Tangentialvektor:

$$\frac{d\underline{r}}{dx} = \underline{e}_x + \frac{dy}{dx}\underline{e}_y \qquad \left|\frac{d\underline{r}}{dx}\right| = \sqrt{1+\left|\frac{dy}{dx}\right|^2} = 1 + O\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$\longrightarrow \quad \hat{\underline{t}} = \underline{e}_x + O\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \lambda(x) \approx 0 + O\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) \longrightarrow \tau = 0$$

(ii) Geschwindigkeit.

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}y(x,t)\,\underline{e}_y \perp \underline{e}_x = \hat{\underline{t}}$$

(iii) $\dfrac{d^4\underline{r}}{dx^4} = \dfrac{d^4 y}{dx^4}\,\underline{e}_y$

$$(7.11) \xrightarrow[\text{Linearisierung}]{(i)-(iii)} \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{k_B T\, l_p}{\zeta_\perp}\frac{d^4 y}{dx^4}} \quad (7.13)$$

... Hyperdiffusionsgleichung

. Lösung: Ansatz: $y(x,t) = e^{-i\omega t}\,y(x)$ & $y(0) = y_0$

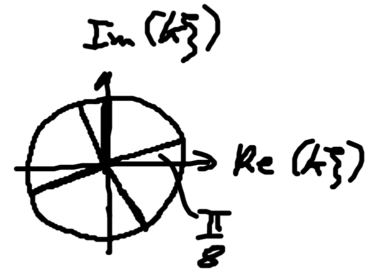
$$\longrightarrow \quad \boxed{i\,y(x) = \xi^4 \frac{d^4 y}{dx^4}} \quad (7.14)$$

$$\text{mit} \quad \boxed{\xi = \left(\frac{k_B T\, l_p}{\zeta_\perp \omega}\right)^{1/4}} \quad (7.15)$$

... Eindringtiefe

(i) Lösung für $L \longrightarrow \infty$:

Ansatz: $y(x) = e^{ikx}$ in (7.14)



$$\longrightarrow \quad i = (k\xi)^4$$

$$k_{1/2} = \pm \frac{1}{\xi}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{8}}_{c_1} + i\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{8}}_{c_2}\right)$$

$$k_{3/4} = \pm \frac{1}{\xi}\left(\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right)$$

Lösung mit $y(x \to \infty)$ & $y'(0) = 0$ [s.(7.12b)]

$$\longrightarrow y(x,t) = \frac{y_0}{2}\Big[\underbrace{e^{-c_2 x/\xi}}_{\text{Dämpfg mit }\xi}\,\underbrace{e^{i(c_1 \frac{x}{\xi} - \omega t)}}_{\text{Welle}\rightarrow} + e^{-c_1 x/\xi}\,\underbrace{e^{-i(c_2\frac{x}{\xi} + \omega t)}}_{\leftarrow}$$

von k_1 — von k_4

$$\longrightarrow \boxed{\xi \ldots \text{ Eindringtiefe für Oszillationen eines Filamentendes}}$$

(ii) endliches L:

Reskalierung: $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{t} = \omega t$

führe ein: dimensionslose Größe:

$$\boxed{Sp = \frac{L}{\xi} = \left(\frac{\zeta_\perp \omega L^4}{k_B T l_p}\right)^{1/4} = \left(\frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Biegekraft}}\right)^{1/4}} \quad (7.17)$$

$$(7.13) \longrightarrow \boxed{\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = -\,Sp^{-4}\,\frac{d^4\bar{y}}{d\bar{x}^4}} \quad (7.18)$$

$\longrightarrow$ Sp bestimmt Verhalten des Filaments!

(1) $Sp \ll 1 \;\hat{=}\; L \ll \xi$ … starrer Stab

(2) $Sp \approx 1 \;\hat{=}\; L \approx \xi$ … „hydrodynam. Reibung biegt gesamten Stab"

(3) $Sp \gg 1 \;\hat{=}\; L \gg \xi$ … „unendlicher Stab"