7.3 Mikroschwimmer

→ s. Folien

8. Die Brownsche Bewegung: DER stochastische Prozeß

- Motivation:
  (i) Beispiel an dem Theorie der stochastische Prozesse entwickelt wurde
  (ii) Illustration der Grundkonzepte, Details dann in Kap. 10 & 11

8.1 Historie

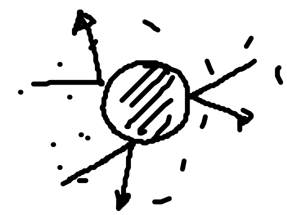
- 1827: Robert Brown: beobachtet Samenkörner im Wasser gelöst/suspendiert (unterm Mikroskop)

→ irreguläre Bewegung
organischer Ursprung der Bewegung wurde ausgeschlossen

- 1905: erste Erklärung durch Einstein: Ann. Phys. (Leipzig) 17, 549 (1905)
  „Über die von der molekular-kinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen"

Einstein: irreguläre Bewegung aufgrund von Stößen der Flüssigkeitsmoleküle, die statistisch unabhängig voneinander erfolgen

theoretische Beschreibung
$\longrightarrow$ Kap. 8.3



- 1906: parallele Beschreibung durch Smoluchowski, formale Ausarbeitung der Konzepte
- 1906: alternative Theorie durch Langevin

8.2 Die Langevin-Gleichung: eine stochastische Differentialgleichung

- hier: erster Zugang, Ausarbeitung in Kap. 10 & 11
- Bewegungsgleichung für suspend. Teilchen (1D):

$$m\ddot{x} = \underbrace{-\gamma\dot{x}}_{\substack{\text{Reibungs-}\\ \text{kraft}\\ \gamma = 6\pi\eta a}} + \underbrace{\Gamma(t)}_{} \qquad (8.1)$$

Zufalls-/stochastische Kraft durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle

hier: thermischer Ursprung durch Wärmebewegung der Fl.moleküle
statistische Beschreibung und Stärke von Γ $\longrightarrow$ Kap. 10

Verallgemeinerung: nichtthermischer Ursprung
$\longrightarrow$ Kap. 11

Bsp: aktive Brownsche Teilchen
= Teilchen mit innerem Antrieb & stochastischer Kraft

- Berechnung von Mittelwerten: $\langle \ldots \rangle$

Mittelung über verschiedene Realisierungen von Γ $\longrightarrow$ unterschiedliche Teilchentrajektorien

(i) mittlerer Ort: $\langle x \rangle$:

$$\langle (8.1) \rangle \longrightarrow m \frac{d^2}{dt^2}\langle x\rangle = -\gamma \frac{d}{dt}\langle x\rangle + \underbrace{\langle \Gamma \rangle}_{=0,\ \text{da } \Gamma = \pm f \text{ gleichwahrscheinlich}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\langle x\rangle = x_\infty \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}\right) \\ &\text{mit } \langle x\rangle = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ x_\infty, & t \to \infty \end{cases} \end{aligned}} \quad (8.3)$$

$$\boxed{\tau = \frac{m}{\gamma}} \quad (8.4)$$

… Impulsrelaxationszeit!

(ii) mittlere quadratische Verschiebung $\langle x^2\rangle$:

Berechne: $\langle (8.1)\, x\rangle \longrightarrow m \langle x \ddot{x}\rangle + \gamma \underbrace{\langle x \dot{x}\rangle}_{= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle} = \underbrace{\langle \Gamma(t) x\rangle}_{=0}$

$\Gamma = \pm f$ gleichwahrscheinlich, unab. von x!

$$m\langle x\ddot{x}\rangle = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle - \langle \dot{x}^2\rangle$$

verwende: $\boxed{\frac{m}{2}\langle \dot{x}^2\rangle = \frac{k_B T}{2}}$ (8.5)

… Gleichverteilungssatz

≙ „Info über Stärke von Γ"

$$\longrightarrow \frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle + \frac{\gamma}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = k_B T \quad (8.6)$$