

VII.3 Plasmonen

Plasmon: kollektive Anregung des Elektronengases (z.B. in der Bänder von Metalle):



Anregung: Licht oder schallwellen (transversal vs. longitudinal Schwingung)

(i) klassische Theorie (Motivation)

Dynamik der Elektronen

$$\underbrace{\partial_t (m \underline{v}_i)}_{\text{Impuls der Elektronen}} = -e \underbrace{\underline{E}}_{\text{Lorenzkraft (ohne Magnetfeld)}}$$

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = e \frac{1}{\Delta V} \sum_i \underline{v}_i \leftarrow \text{über Elektronen in einem Mittdrysvolumen } \Delta V$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{j}(\underline{r}, t) = \frac{e^2}{m} \underbrace{\frac{\Delta N}{\Delta V}}_{\substack{\text{Anzahl} \\ \text{der Elektronen} \\ \text{in Volumen } \Delta V}} \underline{E}(\underline{r}, t)$$

Die Kontinuitätsgl.

$$\nabla \cdot \underline{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{anforderung} \quad \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\frac{e^2 n}{m} \nabla \cdot \underline{E}(k, t) = -\frac{e^2 n}{m \epsilon_0} \rho$$

Maxwell

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(x, t) = -\frac{e^2 n}{m \epsilon_0} \rho \right\| \quad \omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_0}{m \epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Plasma schwingt mit ω_{pe}

(ii) Quantenmechanische Theorie

Dichteschwinger in Formieren

$$\rho_g = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \underbrace{\psi^*(x, t) \psi(x, t)}_{\rho(x, t)} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3x$$

Darstellung für freie Elektronen

$$\rho_g = \frac{1}{\sqrt{V} V} \sum_{k, k'} \int \underbrace{e^{-ik \cdot x + ik' \cdot x + i\vec{q} \cdot x}}_{V \delta_{-k+k'+\vec{q}, 0}} d^3x \quad a_{k'}^\dagger a_k$$

$$\rho_g = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_{k+\vec{q}}^\dagger a_k$$

Das bedeutet für den Erwartungswert $\langle \dots \rangle = \text{tr}(\dots \rho)$

$$\langle \rho_g \rangle = \sum_k \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_k \rangle$$

Dynamik hoch wir!

Erinnerung:

$$H = H_0 + H_C$$

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger a_{\vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{k}-\vec{q}}$$

Heisenberg Bewegungsgl.:

$$\frac{d}{dt} A = \frac{i}{\hbar} [H, A] \Rightarrow \frac{d}{dt} a_{k+q}^\dagger a_k = \frac{i}{\hbar} [H, a_{k+q}^\dagger a_k]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, a_{k+q}^\dagger a_k] \rangle \\ &= \frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle [H_0, a_{k+q}^\dagger a_k] \rangle}_{(a)} + \frac{i}{\hbar} \underbrace{\langle [H_c, a_{k+q}^\dagger a_k] \rangle}_{(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a) &= \sum_{k'} \tau_{k'} \langle [a_{k'}^\dagger a_{k'}, a_{k+q}^\dagger a_k] \rangle = \sum_{k'} \tau_{k'} \left(\underbrace{\langle a_{k'}^\dagger a_{k'} a_{k+q}^\dagger a_k \rangle}_{\delta_{k'k+q}} - \underbrace{\langle a_{k'}^\dagger a_{k+q}^\dagger a_{k'} a_k \rangle}_{\delta_{k'k}} \right) \\ &= \sum_{k'} \tau_{k'} \left(\delta_{k'k+q} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle - \langle a_{k'}^\dagger a_{k+q}^\dagger a_{k'} a_k \rangle \right. \\ &\quad \left. - \delta_{k'k} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle + \langle a_{k+q}^\dagger a_{k'}^\dagger a_{k'} a_k \rangle \right) \end{aligned}$$

$$= (\tau_{k+q} - \tau_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$$

$$\begin{aligned} (b) &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}, \vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{q}} \langle [a_{\vec{k}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}}, a_{k+q}^\dagger a_k] \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}, \vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{q}} \left(\langle a_{\vec{k}+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} a_{k+q}^\dagger a_k \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle a_{k+q}^\dagger a_k a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} \rangle \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{\vec{q}, k} V_{\vec{q}} (\langle a_{k+\vec{q}+\vec{r}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{\vec{k}} \rangle - \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{k-\vec{q}} \rangle)$$

Problem: Einteiler observable $\langle a^\dagger a \rangle$ koppelt an
 $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ Zweiteiler observable.

Warn: Zweiteiler Wechselwirkung bringt weitere Teiler dazu!
 Führt zu unklarer Hierarchie!

Möglichst drüss: Approximiere von Zweiteiler observable
 durch Produkt zwei Einteiler observable.

Hartree-Fock Faktoring (ÜA) um Hierarchie zu schließen:

$$\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \rangle = \langle a_1^\dagger a_4 \rangle \langle a_2^\dagger a_3 \rangle - \langle a_2^\dagger a_4 \rangle \langle a_1^\dagger a_3 \rangle$$

$$(b) = \sum_{\vec{q}, k} V_{\vec{q}} (\langle a_{k+\vec{q}+\vec{r}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{\vec{k}} \rangle - \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{k-\vec{q}} \rangle + \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{k-\vec{q}} \rangle \langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} \rangle - \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}+\vec{q}} a_{k-\vec{q}} \rangle)$$

Randem Phase Approximieren

Wir nehmen jetzt nur Terme mit

$$\langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle \text{ und } \langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle \text{ mit! } \langle a_{k_1}^\dagger a_{k_2} \rangle \text{ schenkt mit}$$

Wir nehmen nur Terme mit die genauso schwingen $e^{i(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})t}$
 wie die Dichte fluktuation $\langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle$

Hintergrund: Wir betrachte nur Fluktuation (klein!) der Gleichgewicht der
 Elektron, d.h. $\langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle$ als störrig, an dem Terme
 können starke Abweichung.

$$(b) = \sum_{\vec{q}, k} V_{\vec{q}} (\langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle \langle a_{k+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle - \langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{k-\vec{q}} \rangle \langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle)$$

$$- \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle + \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle$$

$$= V_q \sum_{\vec{k}} (\langle a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle - \langle a_{\vec{k}+q}^\dagger a_{\vec{k}+q} \rangle) \langle a_{\vec{k}+q}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle$$

Gesamtgleichung:

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) + \frac{i}{\hbar} V_q (\langle a_k^\dagger a_k \rangle - \langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle)$$

Ziel: Eigenfrequenz der Plasmaschwingung: $\sum_{\vec{k}} \langle a_{\vec{k}+q}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle$

Ansatz

$$\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(t) = e^{-i(\omega+i\gamma)t} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(0)$$

↪ $\gamma > 0 \quad \gamma \rightarrow 0$
Kausalität

$$\Rightarrow (-i(\omega+i\gamma)) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(0) = \frac{i}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$$

$$+ \frac{i}{\hbar} V_q (\underbrace{\langle a_k^\dagger a_k \rangle}_{f_k} - \underbrace{\langle a_{k+q}^\dagger a_{k+q} \rangle}_{f_{k+q}})$$

↙ aufbauen nach $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$

$$\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{\frac{i}{\hbar} V_q (f_k - f_{k+q})}{(-i(\omega+i\gamma) + (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)) \sum_{\vec{k}} \langle a_{\vec{k}+q}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle}$$

Summiere über \vec{k} , beachte $\sum_{\vec{k}} \langle a_{\vec{k}+q}^\dagger a_{\vec{k}} \rangle = \rho_q$

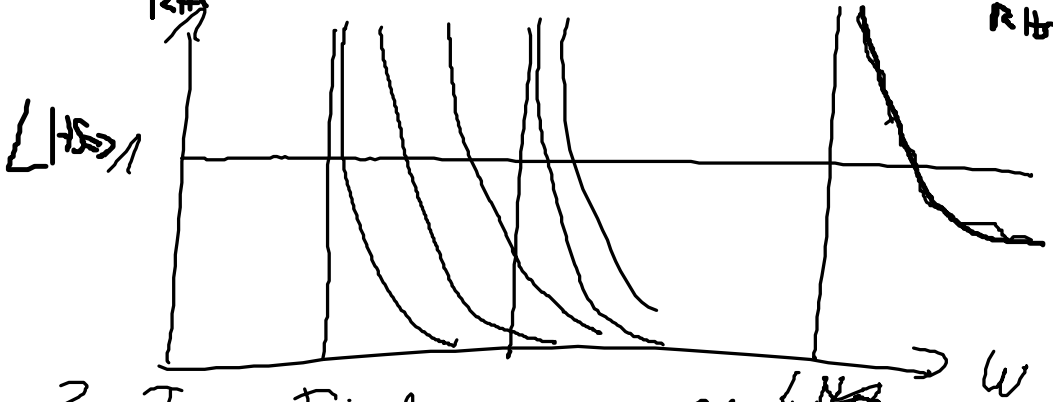
$$\rho_q = \sum_{\vec{k}} \frac{V_q (f_{k+q} - f_k)}{(\hbar(\omega+i\gamma) + (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)) \rho_q}$$

$$\Rightarrow \left\| 1 = V_q \sum_{\vec{k}} \frac{(f_{k+q} - f_k)}{\hbar(\omega+i\gamma) + (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k)} \right\|$$

Bestimmungsgleichung für Plasmandispersion!

$$\text{LHS} = \sum_k \frac{t_k}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q}} - \frac{1}{\omega + \epsilon_{k-q} - \epsilon_k} \right)$$

Grad: 3. Ordnung Ansatz

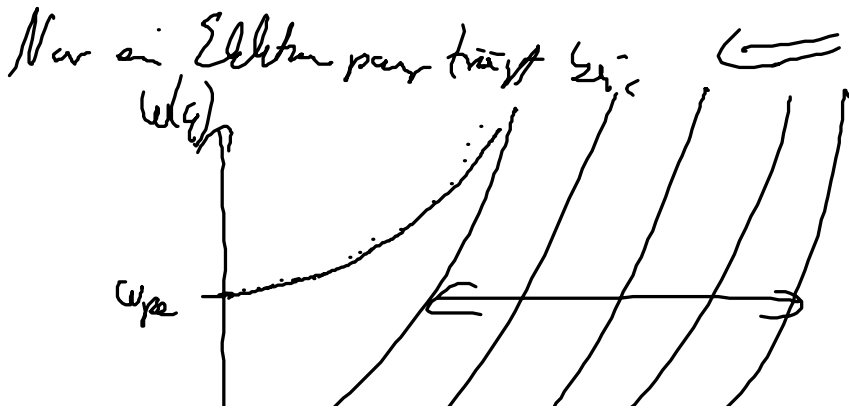


Zwei Typen Eigenfrequenzen Pole stellen complex

1) (a) $\omega \approx +\epsilon_q = \frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) = \frac{\hbar^2}{m} k \cdot q + \frac{\hbar^2}{2m} q^2$ [für kleine q]

(b) $\omega \approx \frac{1}{\hbar} (\epsilon_k - \epsilon_{k-q}) = \frac{\hbar^2}{m} k \cdot q - \frac{\hbar^2}{2m} q^2$

$$\left(-i \left(\frac{1}{\hbar} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) + i\gamma \right) \right) \left(a_{k+q}^\dagger a_k \right) = \frac{\hbar}{m} (\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \left(a_{k+q}^\dagger a_k \right) + \frac{\hbar}{m} k q \dots$$



Summe wird 0 sein für andere k

(a) $\omega_q^{\text{max}} = \frac{\hbar^2 k_F q}{m} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$

$\omega_q^{\text{min}} = -\frac{\hbar^2 k_F q}{m} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$



2) Man kann zeigen dass $\omega_p(q) = \omega_{pe} (1 + \alpha q^2)$ (koll. q)
 Hier Grenzfrequenz für $q \rightarrow 0$
 $f_{k+q} - f_k = f_k + q \cdot \nabla_k f_k - f_k = -q \cdot \nabla_k f_k$

$$1 = V_q \sum_k \frac{-q \cdot \nabla_k f_k}{\hbar(\omega + i\eta) - \frac{\hbar^2 q \cdot k}{m}} = V_q \sum_k q \cdot \left(\frac{\nabla_k f_k}{\hbar} \right) \left(1 + q \cdot k \frac{\hbar^2}{m_0 \omega \hbar} \right) \frac{1}{\omega}$$

$$= \underbrace{V_q}_{\frac{e^2}{93 V_0}} \sum_k \underbrace{f_k}_{\frac{1}{n}} q \cdot q \frac{1}{m_0 \omega^2} = \frac{V_q}{m \omega^2} q^2 n_0$$

$$1 = \frac{e^2}{93 V_0} \cdot \frac{n_0}{m \omega^2} = \frac{e^2 n_0}{m \omega^2 \epsilon_0} \Rightarrow \omega_{pe} = \left(\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir sehen $\omega(q) = \omega_{pe} (q \rightarrow 0)$

Man kann zeigen mit Plasman-Pol Näherung.

$$\omega(q) = \omega_{pe} (1 + \alpha q^2) \text{ für koll. Anregung}$$

Zusammenfassung und Hinweise

- 1) Im Elektronengas gibt es sowohl Anregungen von Elektronenpaaren als auch kollektive Anregungen oder Elektronen (Plasmen)
- 2) Es gibt es gibt viele Arten von Plasmen (Oberflächen, longitudinal, transversal ...), Erzeugen Verunreinigungen etc.
- 3) Die kollektiven Anregungen zerfallen sehr schnell in Paar-Anregungen, Plasmen haben in der Regel eine kurze Lebensdauer.