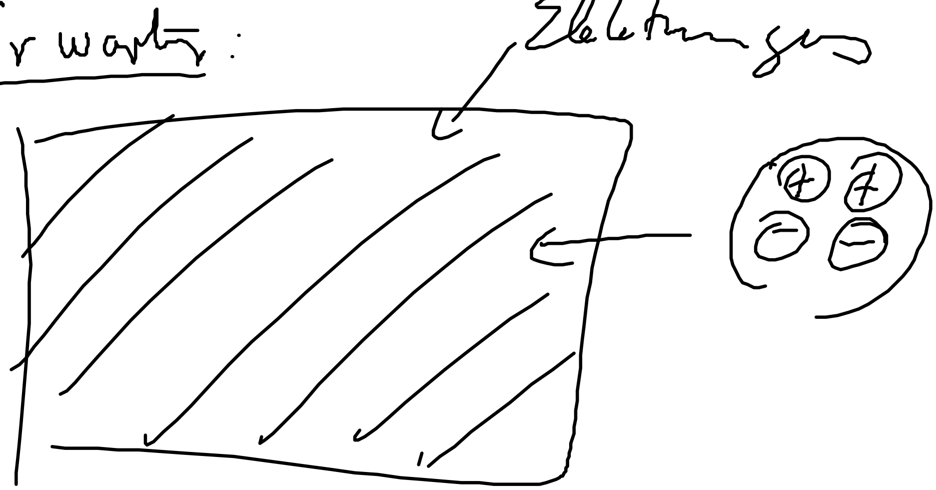
VII.4 Plasmascreening

Bemerkung: Heute am Termin der Übung auch VL im Raum EW202

Ziel Beschreibung der Coulomb WW nur zw. Zuständen
zw. Zuständen zu beschreiben die vom GG abweichen
Einfluß der vorhandenen Ladungsträger (z.B. niedrige Bänder) durch
effektives Coulomb Potential.

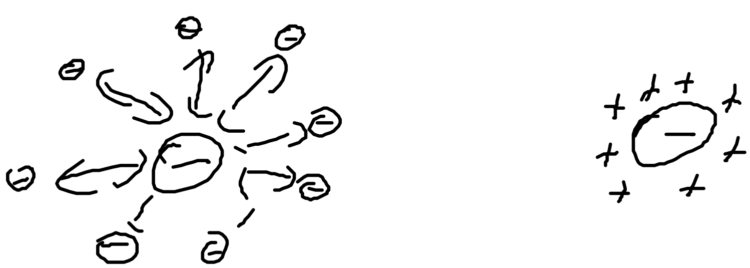
Erwartung:



von außen
kann auch anderes
Band sein!

Also Ziel ist zu wissen, wie reagiert ein Elektronen Gas auf
eine Testladung (externes Elektron oder Loch!)

Erwartung



Elektronen stoßen sich ab $\Rightarrow$ führt zu unkompensierten positiven Hintergrund

Ziel Konstruktion Effektiven Ham. Op für Testladung

(Dielektrische Fkt, im Prinzip Dispersionsrelation der longitudinalen Schwingung)

Ham. Op. sollte die Form haben

$$H = \sum_k E_k a_k^\dagger a_k + \sum_{qk} V_{eff,q} \, a_{k+q}^\dagger a_k$$

$$V_{eff}(\underline{r}) = V(\underline{r}) + \underbrace{V_{ind}(\underline{r})}_{} \quad (\#)$$

Potential der Testladung — Einfluß der abschirmenden Elektronen

Analog zum letzten Abschnitt wird Bewegungsgl. aufgestellt für $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$; (wieder mit RPA)

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle + \frac{i}{\hbar} V_{q,eff} (f_k - f_{k+q})$$

Wie im letzten Abschnitt FT

$$\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(\omega) = \frac{i}{\hbar} \frac{V_{q,eff}(f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega + i\eta) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)} \quad (*)$$

Aus der Poissongl. erhält man das induzierte Potential des Plasmas:

$$\Delta V_{ind}(\underline{r}) = \frac{e\,\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Erinnerung, des nackten Coulomb Konst $\Delta V_{coul}(\underline{r}) = \frac{\delta(\underline{r} - \underline{r}')}{\varepsilon_0}$

$$\Downarrow$$

$$V_{ind}(q) = -\frac{e}{\varepsilon_0 q^2}\, \rho_q \overset{(*)}{=} \underbrace{\frac{e^2}{\varepsilon_0 V q^2}}_{\hat{=}\, V_q} \sum_k \frac{i}{\hbar} V_{q,\text{eff}} \frac{(f_k - f_{k+q})}{(-(\omega + i\eta)) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}$$

$$\rho_q = \frac{1}{V} \sum_k \langle a^\dagger_{k+q} a_k \rangle$$

<u>Nun in FT von (#) einsetzen:</u>

$$\underline{V_{\text{eff},q}} = V_q + V_{ind,q} = V_q \left(1 + \underline{V_{q,\text{eff}}} \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{(-(\omega+i\eta)) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}\right)$$

$$V_{\text{eff},q} \left(1 - V_q \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{(-(\omega+i\eta)) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}\right) = V_q$$

$$\Rightarrow \quad V_{\text{eff},q} = \frac{V_q}{\left(1 - V_q \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{(-(\omega+i\eta)) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}\right)}$$

Aus
$$\frac{V_q}{\varepsilon(q,\omega)} = V_{\text{eff},q}$$
folgt dann die <u>Lindhardformel</u>

$$\boxed{\varepsilon(q,\omega) = 1 - V_q \sum_k \frac{(f_{k+q} - f_k)}{\hbar(\omega + i\eta) + (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)}}$$

<u>Bem!</u> $\mathrm{Re}(\varepsilon(q,\omega)) = 0$ dann ergeben sich die Schwingungszustände des Plasmas (longitudinale Zustände)

Für $\omega \to 0$ werten wir das mal aus:

$$\varepsilon(q,0) = 1 - V_q \sum_k \frac{f_{k+q} - f_k}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k}$$

Für kleine q war $\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{m} \underline{k} \cdot \underline{q}$

und $f_{k+q} - f_k = \underline{q} \cdot \nabla f_k$

Fermi Dirac Verteilung

$$f_k = \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon_k - \mu)\beta}}$$

wobei $q \cdot \nabla f_k = -\frac{\partial f_k}{\partial \mu} \underline{q} \cdot \nabla_k \varepsilon_k \underset{\text{Parabolisches Band}}{=} -\frac{\hbar^2}{m} \underline{q} \cdot \underline{k} \frac{\partial f_k}{\partial \mu}$

$$\varepsilon(q,0) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2 V} \sum_k \frac{\frac{\hbar^2}{m} \underline{q} \cdot \underline{k} \frac{\partial f_k}{\partial \mu}}{\frac{\hbar^2}{m} \underline{k} \cdot \underline{q}} = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2 V} \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\underline{k}} f_k$$

$$\frac{1}{V}\sum_{\underline{k}} f_k \to n$$

$$= 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{\partial n}{\partial \mu} \equiv 1 + \frac{\varkappa^2}{q^2}$$

mit $\varkappa = \sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2} \frac{\partial n}{\partial \mu}}$ 3D Abschirmwellenvektor.

$$V_{eff,q} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 V} \frac{1}{q^2 + \varkappa^2} = \frac{V_q}{\varepsilon(q,0)}$$

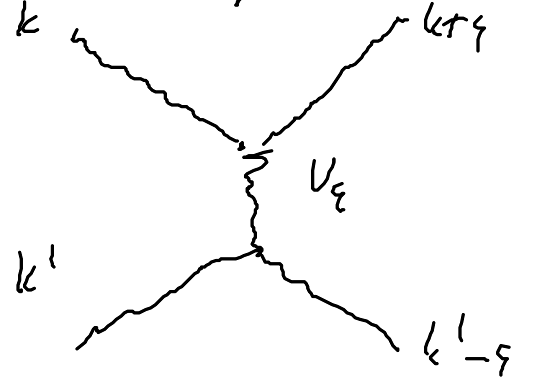
Abgeschirmtes Coulomb Potential

wird in der Regel für Elektronen und Löcher verwendet die nicht im GG vorhanden sind.

XI. Supraleitung und Polaronen

XI.1 Polaron – Effektive Elektron – Elektron – Wechselwirkung

Erinnerung an Coulomb Wechselwirkung



$$a^\dagger_{k}\, a^\dagger_{k'}\, a_{k'-q}\, a_{k+q}$$

Herleitung:

$$H = H_0 + e \int \psi^\dagger(\underline{r})\, \varphi(\underline{r})\, \psi(\underline{r})\, d\underline{r}$$

Poissongl.

$$\Delta \varphi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0} = e\,\frac{\psi^\dagger(\underline{r})\,\psi(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \frac{\psi^\dagger(\underline{r}')\,\psi(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow H = H_0 + \iint \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\psi^\dagger(\underline{r})\,\psi^\dagger(\underline{r}')\,\psi(\underline{r}')\,\psi(\underline{r})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d\underline{r}\, d\underline{r}'$$

Ergo: Das elektrostatische Potential $\varphi(\underline{r})$ vermittelt die Coulomb WW.

Man kann sagen Elektron erzeugt Störung / Veränderung im Potential $\varphi(\underline{r})$, dass dann wieder Elektronen beeinflusst.

(Bem: Man kann $\varphi(\underline{r})$ mit longitudinalen Photonen quantisieren (meist unüblich) Dann wird die Coulomb WW durch Emission und Reabsorbtion eines longitudinalen Photons beschrieben)

Idee: Analog zu Elektron – Phonon Wechselwirkung eine Elektron – Elektron Wechselwirkung konstruieren.

Also: Elektron versetzt Kristallgitter, anderes Elektron wird durch Verzerrung beeinflusst.

Oder anderes herum Elektron emittiert Phonon und anderes Elektron absorbiert Phonon.

Ausgangspunkt Fröhlich Wechselwirkung (LO-Phonon)

$$H = \hbar \sum_{\underline{k}} \varepsilon_{\underline{k}} a^{+}_{\underline{k}} a_{\underline{k}} + \sum_{q} \hbar\omega_q b^{+}_q b_q + \sum_{q\underline{k}} D_q a^{+}_{\underline{k}+q} a_{\underline{k}} (b_q + b^{+}_{-q})$$

Wir berechnen jetzt die zeitliche Entwicklung der Phononenoperatoren:

$$\Big\| \; \partial_t b^{+}_{-q} = \frac{i}{\hbar}[H, b^{+}_{-q}]_{-} = i\omega_q b^{+}_{-q} + \frac{i}{\hbar}\sum_k D_q \underline{a^{+}_{k-q} a_k} \; \Big\|$$

Phononerzeugung wird durch Dichteoperator angetrieben.

$$\Big\| \; \partial_t b_q = -i\omega_q b_q - \frac{i}{\hbar}\sum_k D_{-q} a^{+}_{k-q} a_k \; \Big\|$$

<u>Interpretation der Gleichung</u>

$$\rho(\underline{r}) = e\,\psi^{+}(\underline{r})\psi(\underline{r}) = -\frac{e}{V}\sum_{k_1 k_2} e^{-i(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)\underline{r}} a^{+}_{k_1} a_{k_2}$$

$\Rightarrow$ relativ und Schwerpunkts koordinaten

$$\underline{q} = \underline{k}_1 - \underline{k}_2 \quad \text{und} \quad \underline{K} = \frac{\underline{k}_1 + \underline{k}_2}{2}$$

$$\rho(\underline{r}) = -\frac{e}{V}\sum_q \underline{e^{-iq\underline{r}}} \sum_{\underline{k}} a^{+}_{k+\frac{q}{2}} a_{k-\frac{q}{2}}$$

folgt für $q=0$ homogene Elektronenverteilung
für $q\neq 0$ inhomogene Elektronenverteilung.

Ergo: Phononen werden durch räumliche Verzerrung der Elektronenverteilung erzeugt,

Wir lösen die Phonon Bewegungsgl. formal durch Integration.

$$b_{-q}^{+}(t) = i\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_q(t-t')} D_{-q}\sum_k a_{k-q}^{+}(t')a_k(t')\,dt' + b_q^{+}(t=-\infty)$$

$$b_q(t) = -i\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega_q(t-t')} D_{-q}\sum_k a_{k-q}^{+}(t')a_k(t')\,dt' + \underbrace{b_q(t=-\infty)}_{\text{vernachlässigen}}$$

unterschiedliches Zeitargument

vernachlässigen
Sollte für e-e WW nicht wichtig sein!

Markov Näherung

$$a_{k-q}^{+}(t') = e^{i\varepsilon_{k-q}t'}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(t')$$

Also:

$$b_{-q}^{+}(t) = i\sum_k\int_{-\infty}^{t} D_{-q}\, e^{i\omega_q(t-t')}\, e^{i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)t'}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(t')\,\tilde{a}(t')$$

Integrationsvariable ändern $t'=t-s$

$$=\sum_k i\underbrace{\int_0^{\infty} ds\, e^{i\omega_q s}\, e^{-i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)s}}\, D_q\, e^{i\varepsilon_{k-q}t}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(\underset{\underset{t}{\approx}}{t-s})\,\tilde{a}_k(\underset{\underset{t}{\approx}}{t-s})\,e^{-i\varepsilon_k t}$$

$$= i\sum_k a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)\,D_{-q}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{i\omega_q s}\, e^{-i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)s}\, e^{-\eta s}}_{-\frac{1}{i\omega_q - i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)-\eta}} \qquad \overbrace{a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)}$$

Konvergenz erzeugender Faktor

$$b_{-q}^{+}(t) = -i\sum_k D_{-q}\frac{a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)}{i(\omega_q+\varepsilon_k-\varepsilon_{k-q})-\eta}$$

$$b_q(t) = -i\sum_k D_q\frac{a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)}{\ldots}$$

$i(\omega_q - \varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}) + \eta$

Wir können jetzt die Phonon Operatoren in die Elektron-Phonon WW einsetzen.

$$H_{el-ph} = \sum_{kq} D_q \, a^{+}_{k+q} a_k \left(b_q + b^{+}_{-q} \right)$$

einsetzen

$$= -i \sum_{qk\tilde{k}} |D_q|^2 \, a^{+}_{k+q} a_k \, a^{+}_{\tilde{k}-q} a_{\tilde{k}} \left(\frac{1}{i(\omega_q + \varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q}) - \eta} + \frac{1}{i(\omega_q - \varepsilon_{\tilde{k}} + \varepsilon_{\tilde{k}-q}) + \eta} \right) \quad \eta \to 0$$

$$\frac{(\omega_q + \varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q} + \omega_q - \varepsilon_{\tilde{k}} + \varepsilon_{\tilde{k}-q})}{i\,(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2)}$$

$$\| $$

$$\frac{2\omega_q}{i\,(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2)}$$

$$= - \sum_{qk\tilde{k}} \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2)} \, a^{+}_{k+q} \underbrace{a_k \, a^{+}_{\tilde{k}-q}}_{\delta_{k\,\tilde{k}-q}} a_{\tilde{k}}$$

In Normalordnung bringen

$$= \sum_k \left(\sum_q \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{((\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - \omega_q^2)} \right) a^{+}_k a_k \qquad (i)$$

$$+ \sum_{qk\tilde{k}} \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{(\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2 - \omega_q} \, a^{+}_{k+q} a^{+}_{\tilde{k}-q} a_{\tilde{k}} a_k \quad (ii)$$

Diskussion: (i) Der erste Term führt zu einer Renormierung der Energie da er die Form $\sum_k \delta\varepsilon_k \, a^{+}_k a_k$ hat.

Im Prinzip sind das die Auswirkungen der Formierung von einem Quasiteilchen zw. Elektron und Phonon: Polaron. So gibt es eine Energieabsenkung beim Γ-Punkt für $(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 < \omega_q^2$!

Phonon Wolke modifiziert Selbstenergie

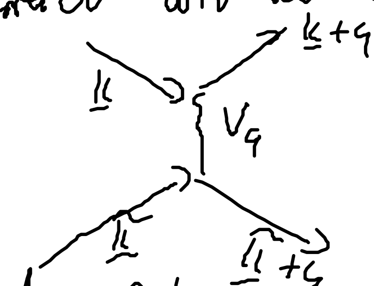
Nur wichtig für kleine $\underline{k}$ wegen $\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}$, da Phononen langsam sind

(ii) Der zweite Term hat die Form

$$\tilde{V}_q \; a^\dagger_{k+q} \, a^\dagger_{\tilde{k}-q} \, a_{\tilde{k}} \, a_k$$

gleiche Form wie die Coulomb WW

Ziel erreicht wir haben eine effektive Elektron-Elektron-WW



Dabei ist das Potential $\dfrac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{(\varepsilon_q - \varepsilon_{k-q})^2 - \omega_q^2}$

Falls $(\varepsilon_q - \varepsilon_{k-q})^2 < \omega_q^2$

$\Rightarrow$ effektive Elektron-Elektron Anziehung

Verzerrung im Kristall durch Elektron ergibt eine positive Wolke!

Ursprung der Wechselwirkung wurde durch Verwendung anderer Isotopen für das Gitter. (Isotopieeffekt).

Phononen wurden aus dem Problem eliminiert.

XI.2 Der Grundzustand der BCS-Theorie

Ziel: Beschreibung der Supraleitung

Effekt: Unterhalb einer Sprungtemperatur T_c gibt es Zustand unendlicher Leitfähigkeit (keine Streuung)

$T_c = T_c(M)$ mit M Kernmasse (Isotopeneffekt)

$\Rightarrow$ Elektron-Phonon WW ist wichtig.

Erklärung: eff. Elektron-Elektron WW erzeugt gebundene Elektron-Paare Cooper Paare.

Startpunkt: Wir müssen uns klar werden, welcher Anteil der effektiven WW am stärksten ist:

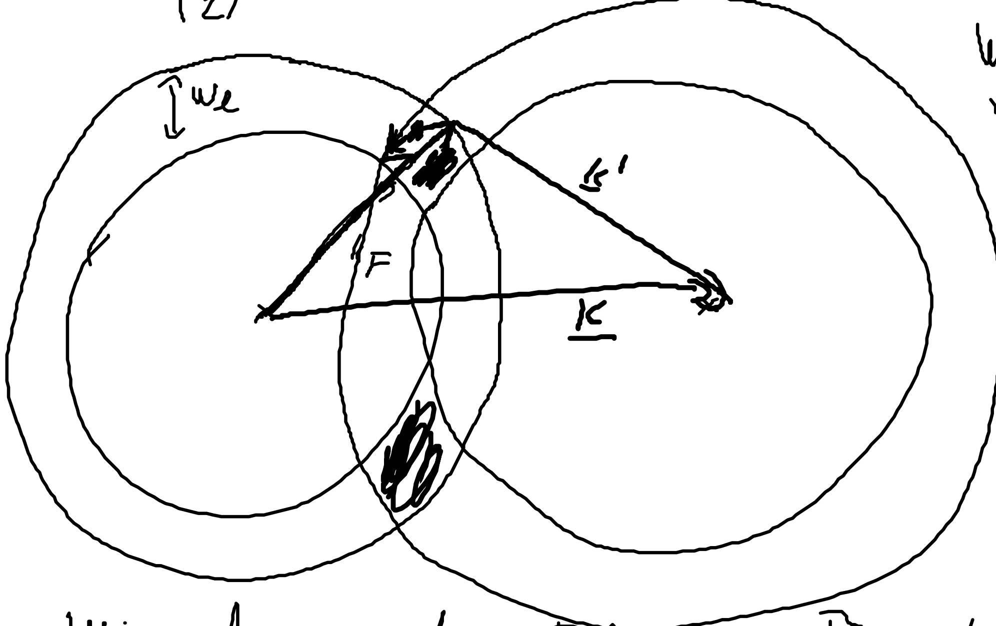
$$H_{WW} = \sum_{k\tilde{k}q} \tilde{V}_{\tilde{k}q}\, a^\dagger_{k+q}\, a^\dagger_{\tilde{k}-q}\, a_{\tilde{k}}\, a_k$$

Folgende Beiträge:

(1) $V_{\tilde{k}q} \simeq -V_0$ = ungefähr konstant

Nur der Bereich, wo WW anziehend ist. Also nicht weit von der Fermi-Kante

(2)



Wechselwirkung kann nur außerhalb der Fermikugel erfolgen, daher nur mit der Energie $E(k) \le E_F + \hbar\omega_c$

Größter Überlapp der Bereiche, wenn $K = 0$!

Wir nehmen nur den Fall $k = -\tilde{k}$ mit

Also Paar mit verschwindendem Gesamtimpuls $K = k + \tilde{k} = 0$

Also:

$$H_{WW} = -V_0 \sum_{kq\sigma} a^+_{k+q,\sigma} a^+_{-k-q,-\sigma} a_{-k-\sigma} a_{k\sigma}$$

Spin

Mit der Nebenbedingung
$V_0 \neq 0$ für $|E(k+q) - E(k)| \leq \hbar\omega_q$

Sowie $H_0 = \sum_{kq} E(k) a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$

Errinnerung an statische Physik, großkanonische Potential (Variieren der Teilchen)!

$\Rightarrow \quad H \to H - E_F N$

$\Rightarrow \quad H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k) a^+_{k\sigma} a_{k\sigma}$

$\varepsilon(k) = E(k) - E_F$

Um warm zu werden, betrachten wir zuerst den Fall ohne WW.

$\alpha_{k,\sigma} = u_k a_{k\sigma} - v_k a^+_{-k-\sigma} \qquad \alpha_{-k,-\sigma} = u_k a_{-k,-\sigma} + v_k a^+_{k\sigma}$

$\alpha^+_{k,\sigma} = u_k a^+_{k\sigma} - v_k a_{-k-\sigma} \qquad \alpha^+_{-k,-\sigma} = u_k a^+_{-k-\sigma} + v_k a_{k,\sigma}$

Falls wir die Bedingungen $u^2_{k\sigma} + v^2_{k\sigma} = 1$ und $u_{k\sigma} = u_{-k-\sigma}$, $v_{k\sigma} = -v_{-k,-\sigma}$ stellen, bleiben Fermi Vertauschungsrelationen erhalten (ÜA)

(Bogoliubov-Valatin Transformation)

Inverse Transformation (ÜA):

$a_{k\sigma} = u_k \alpha_{k,\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma} \qquad a_{-k-\sigma} = u_k \alpha_{-k,-\sigma} - v_k \alpha^+_{k\sigma}$

$a^+_{k\sigma} = u_k \alpha^+_{k,\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma} \qquad a^+_{-k-\sigma} = u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma}$

H_0 umformulieren:

$$H_0 = \sum_k \varepsilon(k) \left(a^+_{k+} a_{k+} + a^+_{-k-} a_{-k-} \right)$$

$$= \sum_k \varepsilon(k) \Big((u_k \alpha^+_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k\sigma})(u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^+_{-k-\sigma}) + (u_k \alpha^+_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma})(u_k \alpha_{-k-\sigma} - v_{k\sigma} \alpha^+_{k\sigma}) \Big)$$

$$= \sum_k \varepsilon(k)\Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma} + \alpha^+_{-k-\sigma}\alpha_{-k-\sigma}) + 2u_k v_k(\alpha^+_{k\sigma}\alpha^+_{-k-\sigma} + \alpha_{-k-\sigma}\alpha_{k\sigma})\Big)$$

Die Idee ist, dass die α Operatoren Anregungen aus dem Grundzustand erzeugen (Ersatz Vacuum)

Also $\alpha_{k\sigma}|0\rangle = 0$

$$\prod_k \alpha_{k+}\alpha_{-k-}|vac\rangle = \prod_k (u_k a_{k+} - v_k a^+_{-k-})(u_k a_{-k-} + v_k a^+_{k+})|vac\rangle$$

$$= \prod_k \Big(\cancel{u_k^2 a_{k+} a_{-k-}} + u_k v_k(\underbrace{a_{k+}a^+_{k+}}_{1 - \cancel{a^+_{k+}a_{k+}}} - \cancel{a^+_{-k-}a_{-k-}}) + v_k^2 a^+_{k+} a^+_{-k-}\Big)|vac\rangle$$

$$= \prod_k (u_k v_k + v_k^2 a^+_{k+} a^+_{-k-})|vac\rangle$$

ÜA + Normierung

$$\Rightarrow |0\rangle = \prod_k (u_k + v_k a^+_k a^+_{-k})|vac\rangle$$ Normalisierter Grundzustand

Wir müssen u_k, v_k, so wählen, dass $H_0|0\rangle$ Minimal

Wechselwirkung soll verschwinden

$$2u_k v_k(\alpha^+_k \alpha^+_{-k} + \alpha_{-k}\alpha_k)|0\rangle = 0$$

Falls $u_k v_k = 0$ 1. Forderung

$(u_k^2 - v_k^2)(\underbrace{\alpha^+_{k+}\alpha_{k+}}_{0} + \underbrace{\alpha^+_{-k-}\alpha_{-k-}}_{0})|0\rangle$ ist also Null!

Bleibt

$$\sum_k \varepsilon(k)\, 2 v_k^2$$

Setze $v_k = 1$ für $k \le k_F$

und $v_k = 0$ für $k \ge k_F$

Wichtig $N = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = \sum_k 2v_k^2$ wird dann die Teilchenzahl fixiert.

Jetzt auch Wechselwirkung einbeziehen

Also:
$$H = \sum_{k\sigma}\varepsilon(k)(a^+_{k\sigma}a_{k\sigma}) - V_0 \sum_{kq\sigma} a^+_{k+q\sigma}\, a^+_{-k-q-\sigma}\, a_{-k-\sigma}\, a_{k\sigma}$$

Transformiert auf α, α^+ Operatoren!

$$H = \sum_k \varepsilon(k)\,\Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k})$$
$$+ 2 u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k}\alpha_k)\Big)$$
$$- V_0 \sum_{kk'} \Big[u_k v_k u_{k'} v_{k'} (1 - \alpha_{-k'}^+ \alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+ \alpha_{k'})(1 - \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k} - \alpha_k^+ \alpha_k)$$
$$+ (u_k^2 - v_k^2) u_{k'} v_{k'} (1 - \alpha_{-k'}^+ \alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+ \alpha_{k'})(\alpha_{-k}\alpha_k + \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+)$$
Grundzustand anwenden
$$+ (u_k^2\, \alpha_{-k}\alpha_k - v_k^2 \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+)(u_k^2 \alpha_{k'}^+ \alpha_{-k'}^+ - v_k^2 \alpha_{-k'} \alpha_{k'}) \Big]$$
$$H|0\rangle = \Big[2 \sum_k \varepsilon(k) v_k^2 - V_0 \sum_{kk'} u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$
$$+ \sum_k \Big[\underbrace{2 u_k v_k \varepsilon(k) - (u_k^2 - v_k^2) V_0 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'}}_{*} \Big] (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_k) \Big] |0\rangle$$
Damit α gute nicht wechselwirkende Teilchen beschreibt:
$$\sum_{k'} u_{k'} v_{k'} =! \frac{\Delta}{V_0}$$
Für $* = 0$ muß dann
$$2 u_k v_k \varepsilon(k) = \Delta (u_k^2 - v_k^2)$$
ÜA Ansatz $u_k^2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_k)$ und $v_k^2 = \frac{1}{2}(1 - \xi_k)$
$u_k^2 + v_k^2 = 1$ sofort erfüllt ist.
$$\xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$
Wir müssen Δ bestimmen
$$\Delta = V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} = \frac{V}{2} \sum_k \sqrt{1 - \xi_k^2} = \frac{V}{2} \sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2} \int_{-\hbar\omega_{ph}}^{\hbar\omega_{ph}} d\varepsilon \underbrace{Z(\varepsilon)}_{\approx Z(\varepsilon_F) = Z_0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}$$

Nach Δ umstellen

$$1 = V_0 Z_0 \ \mathrm{Arcsinh}\left(\frac{\hbar\omega_L}{\Delta}\right)$$

$$\Delta = \hbar\omega_L \frac{1}{\sinh \frac{1}{V_0 Z_0}} \underset{\text{für klein } V_0}{\approx} 2\hbar\omega_L \cdot e^{-\frac{1}{V_0 Z_0}}$$

Das Ergebnis gibt Störungstheorie

Δ stellt sich als Bindungsenergie heraus

XI.3 Angeregte Zustände

Für die angeregten Zustände

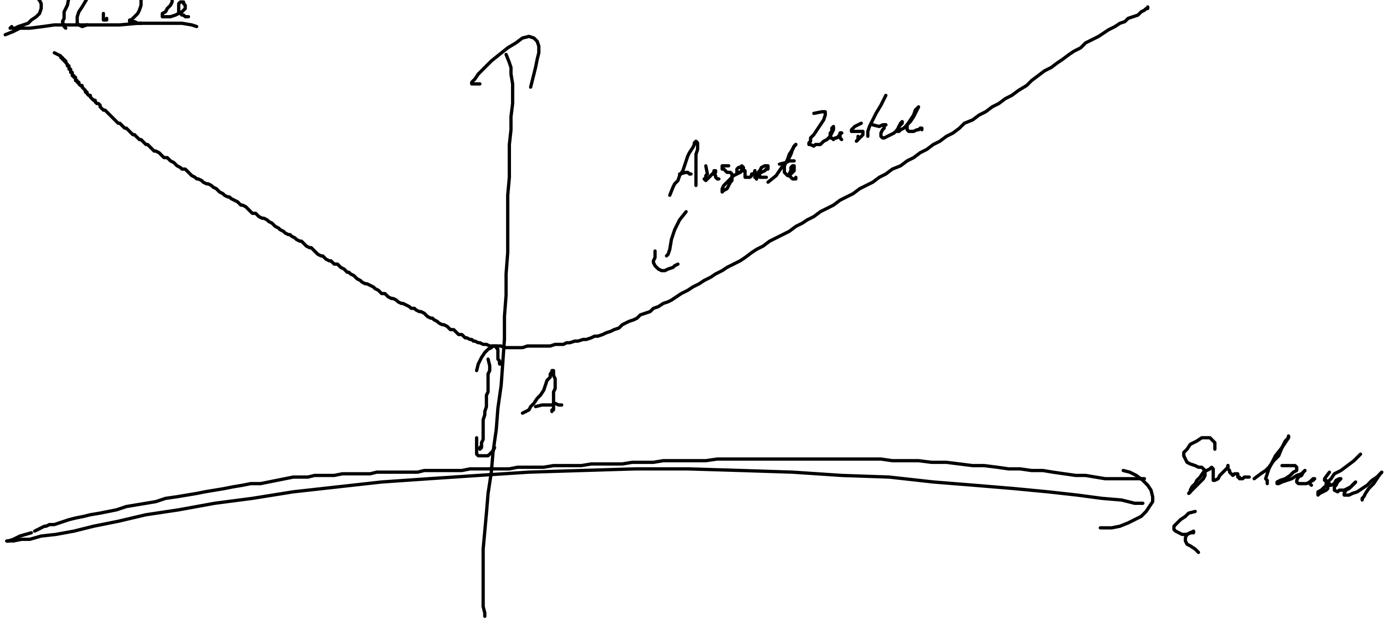
$$H = \ldots\ldots + \sum_k \left[\varepsilon(k)(u_k^2 - v_k^2) + V_0 \sum_{k'} 2 u_{k'} v_{k'} u_k v_k \right] (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) + \ldots$$

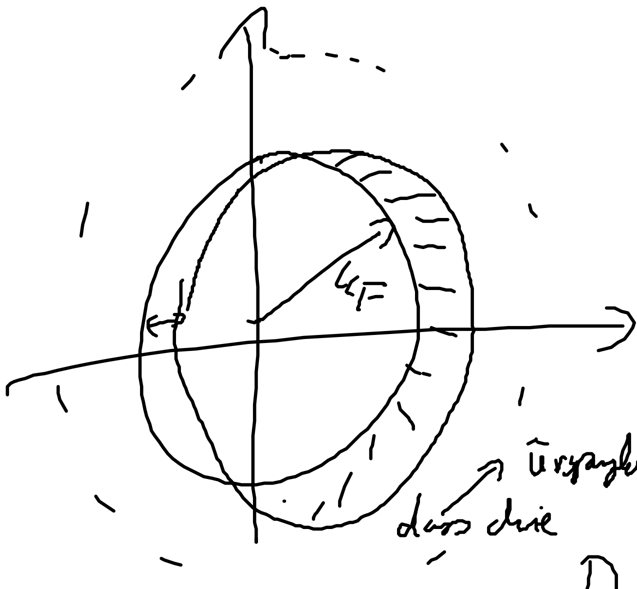
Für die Besetzung $(n_{k\uparrow}, n_{-k\downarrow})$

$$E - E_0 = \sum_k \left[\varepsilon(k) \underbrace{(u_k^2 - v_k^2)}_{\frac{1}{2}\xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}} + 2\Delta \underbrace{u_k v_k}_{\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}} \right] (n_{k\uparrow} + n_{-k\downarrow})$$

$$= \sum_k \sqrt{\epsilon(k)^2 + \Delta^2}\; n_k$$

Skizze





Ein strom führender Zustand verschiebt die Fermikugel. Sobald die Verschiebung passiert führen Streuprozesse, die Zustände auf die alte Fermikugel zurück.

Im Supraleitenden Zustand, verlangt die Energieerhaltung, dass die ursprüngliche Energie mindestens 2Δ über der finalen Energie liegt.

Dennoch kann eine kleine Verschiebung keine Streuung erfahren.

Daher wird für die Streuung eine Mindestenergie benötigt, daher die Sprungtemperatur.