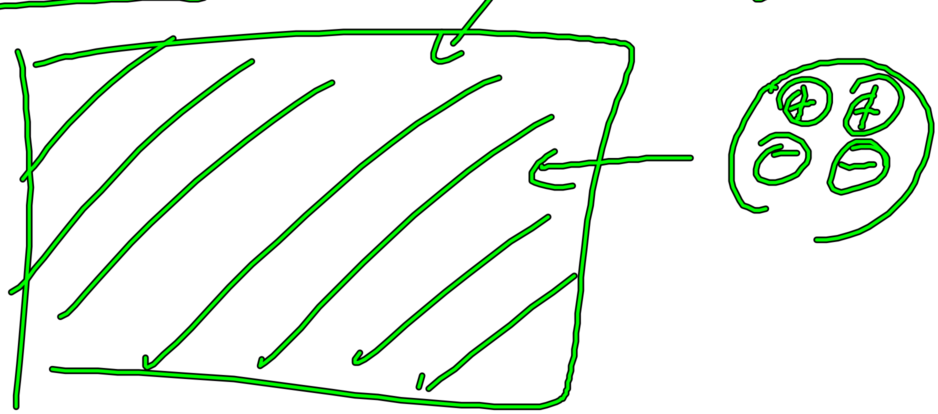
VII.4 Plasmascreening

Bemerkung: Heute am Termin der Übung auch VL im Raum EW202

Ziel Beschreibung der Coulomb WW von zw. Zuständen
zw. Zuständen zu beschreiben die vom GG abweichen
Einfluß der vorhandenen Ladungsträger (z.B. niedrige Bänder) durch
effektives Coulomb Potential.

Erwartung:

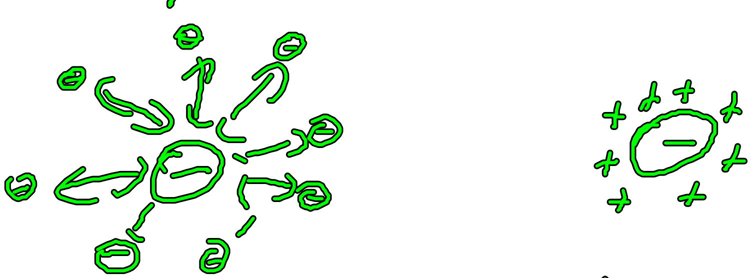
Elektronengas



von außen
kann auch anderes
Band sein!

Also Ziel ist zu wissen, wie reagiert ein Elektronen Gas auf eine Testladung (externes Elektron oder Loch!)

Erwartung



Elektronen stoßen sich ab $\Rightarrow$ führt zu unkompensiertem positiven Hintergrund

Ziel: Konstruktion effektiven Ham.-Op. für Testladung
(Dielektrische Fkt., im Prinzip Dispersionsrelation der longitudinalen Schwingung)

Ham.-Op. sollte die Form haben

$$H = \sum_k E_k a_k^\dagger a_k + \sum_{qk} V_{eff,q}\, a_{k+q}^\dagger a_k$$

$$V_{eff}(r) = \underset{\text{Potential der Testladung}}{V(r)} + \underbrace{V_{ind}(r)}_{\text{Einfluß der abschirmenden Elektronen}} \qquad (\#)$$

Analog zum letzten Abschnitt wird Bewegungsgl. aufgestellt für $\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle$; (wieder mit RPA)

$$\frac{d}{dt} \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle = \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k) \langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle + \frac{i}{\hbar} V_{q,eff} \left[f_k - f_{k+q} \right]$$

Wie im letzten Abschnitt FT

$$\langle a_{k+q}^\dagger a_k \rangle(\omega) = \frac{i}{\hbar} \frac{V_{q,eff} (f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega + i\eta) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)} \qquad (*)$$

Aus der Poissongl. erhält man das induzierte Potential des Plasmas:

$$\Delta V_{ind}(r) = \frac{e\,\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

Erinnerung: das nackte Coulomb kont. $\Delta V_{coul}(r) = \frac{\delta(r - r')}{\varepsilon_0}$

$$V_{ind}(q) = -\frac{e}{\varepsilon_0 q^2}\,\rho_q \underset{\circledast}{=} \frac{e^2}{\varepsilon_0 V q^2} \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{V_{q,eff}\,(f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega+i\gamma) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)}$$

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0 V q^2} \hat{=} V_q$$

$$\rho_q = \frac{1}{V} \sum_k \langle a^\dagger_{k+q} a_k \rangle$$

Nun in FT von $\circledast$ einsetzen:

$$V_{eff,q} = V_q + V_{ind,q} = V_q \left(1 + V_{q,eff} \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega+i\gamma) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)}\right)$$

$$V_{eff,q}\left(1 - V_q \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega+i\gamma) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)}\right) = V_q$$

$$\Rightarrow \quad V_{eff,q} = \frac{V_q}{\left(1 - V_q \sum_k \frac{i}{\hbar} \frac{(f_k - f_{k+q})}{\left(-(\omega+i\gamma) - \frac{i}{\hbar}(\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)\right)}\right)}$$

Aus

$$\frac{V_q}{\varepsilon(q,\omega)} = V_{eff,q}$$

folgt dann die Lindhardformel

$$\left\| \; \varepsilon(q,\omega) = 1 - V_q \sum_k \frac{(f_{k+q} - f_k)}{\hbar(\omega+i\gamma) + (\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k)} \; \right\|$$

Bem! $\mathrm{Re}(\varepsilon(q,\omega)) = 0$ dann ergeben sich die Schwingungszustände des Plasmas (longitudinale Zustände)!

Für $\omega \to 0$ werden wir das noch sehen:

$$\varepsilon(q,0) = 1 - V_q \sum_k \frac{f_{k+q} - f_k}{\varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k}$$

Für kleine q war $\quad \varepsilon_{k+q} - \varepsilon_k = \frac{\hbar^2}{m}\, \underline{k}\cdot\underline{q}$

und $\quad f_{k+q} - f_k = \underline{q}\cdot\nabla f_k$

wobei $\quad q\cdot\nabla f_k = -\frac{\partial f_k}{\partial\mu}\, \underline{q}\cdot\nabla_k \varepsilon_k \underset{\text{Parabolisches Band}}{=} -\frac{\hbar^2}{m}\, \underline{q}\cdot\underline{k}\, \frac{\partial f_k}{\partial\mu}$

<u>Fermi Dirac Verteilung</u>

$$f_k = \frac{1}{1+e^{(\varepsilon_k-\mu)\beta}}$$

$$\varepsilon(q,0) = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2 V} \sum_k \frac{\frac{\hbar^2}{m}\,\underline{q}\cdot\underline{k}\,\frac{\partial f_k}{\partial\mu}}{\frac{\hbar^2}{m}\,\underline{k}\cdot\underline{q}} = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2 V}\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{\underline{k}} f_k$$

n

$$= 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\frac{\partial n}{\partial\mu} \equiv 1 + \frac{\kappa^2}{q^2}$$

mit $\quad \boxed{\kappa = \sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon_0 q^2}\frac{\partial n}{\partial\mu}}}\quad$ 3D Abschirmungswellenvektor.

$$\boxed{V_{eff,q} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 V}\frac{1}{q^2+\kappa^2} = \frac{V_q}{\varepsilon(q,0)}}$$

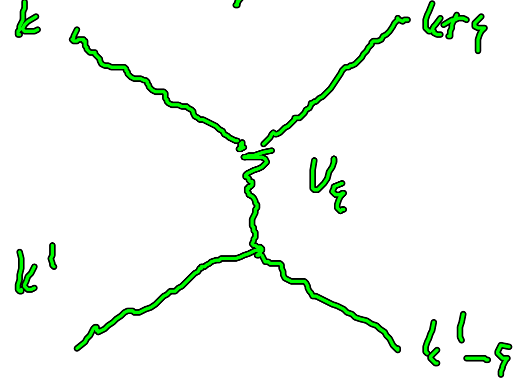
Abgeschirmtes Coulomb Potential

wird in der Regel für Elektronen und Löcher verwendet die nicht im GG vorhanden sind.

<u>XI. Supraleitung und Polaronen</u>

XI.1 Polaron – Effektive Elektron – Elektron – Wechselwirkung

Erinnerung an Coulomb Wechselwirkung



$a^\dagger_k a^\dagger_{k'} a_{k'-q} a_{k+q}$

Herleitung:

$$H = H_0 + e\int \psi^\dagger(r)\,\varphi(r)\,\psi(r)\,dr$$

Poissongl.

$$\Delta\varphi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = e\,\frac{\psi^\dagger(r)\,\psi(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dr'\,\frac{\psi^\dagger(r')\,\psi(r')}{|r-r'|}$$

$$\Rightarrow H = H_0 + \iint \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\psi^\dagger(r)\,\psi^\dagger(r')\,\psi(r')\,\psi(r)}{|r-r'|}\,dr\,dr'$$

Ergeb.!: Das elektrostatische Potential $\varphi(r)$ vermittelt die Coulomb WW.

Man kann sagen Elektron erzeugt Störung / Veränderung im Potential $\varphi(r)$, das dann wieder Elektron beeinflusst.

(Bem: Man kann $\varphi(r)$ mit longitudinalen Photonen quantisieren (nicht üblich). Dann wird die Coulomb WW durch Emission und Reabsorption eines longitudinalen Photons beschrieben)

Idee: Analog aus Elektron – Phonon Wechselwirkung eine Elektron – Elektron Wechselwirkung konstruieren.

Also: Elektron verzerrt Kristallgitter, anderes Elektron wird durch Vorzeichen beeinflusst.

Oder anderes herum Elektron emittiert Phonon und anderes Elektron absorbiert Phonon.

Ausgangspunkt Fröhlich Wechselwirkung (LO-Phonon)

$$H = \hbar \sum_{\underline{k}} \varepsilon_k a^+_{\underline{k}} a_k + \sum_q \hbar\omega_q b^+_q b_q + \sum_{q\underline{k}} D_q a^+_{\underline{k}+q} a_{\underline{k}} (b_q + b^+_{-q})$$

Wir brauchen jetzt die zeitliche Entwicklung der Phononoperatoren:

$$\| \underbrace{\partial_t b^+_{-q} = \frac{i}{\hbar}[H, b^+_{-q}]_- = i\omega_q b^+_{-q}}_{\text{Phononerzeugung}} + \frac{i}{\hbar}\sum_k D_q \underline{a^+_{k-q} a_k} \|$$

Phononerzeugung wird durch Dichteoperator angetrieben.

$$\| \partial_t b_q = -i\omega_q b_q - \frac{i}{\hbar}\sum_k D_{-q} a^+_{k-q} a_k \|$$

Interpretation der Gleichung

$$\rho(r) = e\,\psi^+(r)\psi(r) = -\frac{e}{V}\sum_{k_1 k_2} e^{-i(\underline{k_1}-\underline{k_2})\underline{r}} a^+_{k_1} a_{k_2}$$

$\Rightarrow$ relativ und Schwerpunkts koordinaten

$$\underline{q} = \underline{k}_1 - \underline{k}_2 \quad \text{und} \quad \underline{K} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\rho(r) = -\frac{e}{V}\sum_q \underline{e^{-iqr}} \sum_K a^+_{K+\frac{q}{2}} a_{K-\frac{q}{2}}$$

folgt für $q=0$ homogene Elektronenverteilung
für $q\neq 0$ inhomogene Elektronenverteilung.

Ergo: Phononen werden durch räumliche Verzerrung der Elektronenverteilung erzeugt.

Wir lösen die Phonon Bewegungsgleichung formal durch Integration.

$$b_{-q}^{+}(t) = i\int_{-\infty}^{t} e^{i\omega_q(t-t')} D_{-q}\sum_k a_{k-q}^{+}(t')\,a_k(t')\,dt' + b_q^{+}(t=-\infty)$$

$$b_q(t) = -i\int_{-\infty}^{t} e^{-i\omega_q(t-t')} D_{-q}\sum_k a_{k-q}^{+}(t')\,a_k(t')\,dt' + \underbrace{b_q(t=-\infty)}_{\text{vernachlässigen}}$$

unterschiedliche Zeitargument

Selbe für e-e WW nicht wichtig sein!

Markov Näherung

$$a_{k-q}^{+}(t') = e^{i\varepsilon_{k-q}t'}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(t')$$

Also:

$$b_{-q}^{+}(t) = i\sum_k\int_{-\infty}^{t} D_{-q}\, e^{i\omega_q(t-t')}\, e^{i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)t'}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(t')\,\tilde{a}_k(t')$$

Integrationsvariable ändern $t' = t-s$

$$= \sum_k i\underbrace{\int_0^{\infty} ds\, e^{i\omega_q s}\, e^{-i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)s}}\, D_q\, e^{i\varepsilon_{k-q}t}\,\tilde{a}_{k-q}^{+}(t-s)\,\tilde{a}_k(t-s)\,e^{-i\varepsilon_k t}$$

$$= i\sum_k a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)\,D_{-q}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{i\omega_q s}\, e^{-i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)s}\, e^{-\eta s}}_{-\frac{1}{i\omega_q - i(\varepsilon_{k-q}-\varepsilon_k)-\eta}}$$

$e^{-\eta s}$: Konvergenz erzeugender Faktor

$$b_{-q}^{+}(t) = -i\sum_k D_{-q}\,\frac{a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)}{i(\omega_q+\varepsilon_k-\varepsilon_{k-q})-\eta}$$

$$b_q(t) = -i\sum_k D_q\,\frac{a_{k-q}^{+}(t)\,a_k(t)}{\ldots}$$

$i(\omega_q - \varepsilon_k + \varepsilon_{k-q}) + \eta$

Wir können jetzt die Phononen Operatoren in die Elektron-Phonon WW einsetzen.

$$H_{el\text{-}ph} = \sum_{kq} D_q \, a^+_{k+q} a_k \left(b_q + b^+_{-q} \right)$$

einsetzen

$$= -i \sum_{qk\tilde{k}} |D_q|^2 \, a^+_{k+q} a_k \, a^+_{\tilde{k}-q} a_{\tilde{k}} \left(\frac{1}{i(\omega_q + \varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q}) - \eta} + \frac{1}{i(\omega_q - \varepsilon_{\tilde{k}} + \varepsilon_{\tilde{k}-q}) + \eta} \right) \quad \eta \to 0$$

$$\frac{(\omega_q + \varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q} + \omega_q - \varepsilon_{\tilde{k}} + \varepsilon_{\tilde{k}-q})}{i\left(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2\right)} = \frac{2\omega_q}{i\left(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2\right)}$$

$$= - \sum_{qk\tilde{k}} \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{\left(\omega_q^2 - (\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2\right)} \, a^+_{k+q} \underbrace{a_k \, a^+_{\tilde{k}-q}}_{\delta_{k\,\tilde{k}-q}} a_{\tilde{k}}$$

In Normalordnung bringen

$$= \sum_k \left(\sum_q \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{\left((\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - \omega_q^2\right)} \right) a^+_k a_k \qquad (i)$$

$$+ \sum_{qk\tilde{k}} \frac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{(\varepsilon_{\tilde{k}} - \varepsilon_{\tilde{k}-q})^2 - \omega_q} \, a^+_{k+q} a^+_{\tilde{k}-q} a_{\tilde{k}} a_k \qquad (ii)$$

<u>Diskussion</u>: (i) Der erste Term führt zu einer Renormierung der Energie da er die Form $\sum_k \delta\varepsilon_k \, a^+_k a_k$ hat.

Im Prinzip sind das die Auswirkungen der Formierung von einem Quasiteilchen aus Elektronen und Phononen: Polaron. So gibt es eine Energieabsenkung beim Γ-Punkt für $(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 < \omega_q^2$!

Phonon Wolke   modifizierte Selbstenergie

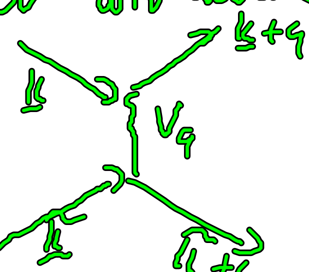
Nur wichtig für kleine $\underline{k}$. wegen $\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q}$, da Phononen langsam sind

(ii) Der zweite Term hat die Form

$$\tilde{V}_q \; a^\dagger_{k+q} \, a^\dagger_{\tilde{k}-q} \, a_{\tilde{k}} \, a_k$$

gleiche Form wie die Coulomb WW

Ziel erreicht: wir haben eine effektive Elektron-Elektron-WW



Dabei ist das Potential $\dfrac{|D_q|^2 \, 2\omega_q}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 - \omega_q^2}$

Falls $(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-q})^2 < \omega_q^2$

$\Rightarrow$ effektive Elektron-Elektron Anziehung

Verzerrung im Kristall durch Elektron ergibt eine positive Wolke!

Ursprung der Wechselwirkung wurde durch Verwendung anderer Isotopen für das Gitter. (Isotopieeffekt).

Phononen wurden aus dem Problem eliminiert.

XI.2 Der Grundzustand der BCS-Theorie

Ziel: Beschreibung der Supraleitung

Effekt: Unterhalb einer Sprungtemperatur T_c gibt es Zustand unendlicher Leitfähigkeit (keine Streuung)

$T_c = T_c(M)$ mit M Kernmasse (Isotopeneffekt)

$\Rightarrow$ Elektron-Phonon WW ist wichtig.

Erklärung: eff. Elektron-Elektron WW erzeugt gebundene Elektron-Paare
Cooper Paare.

Startpunkt: Wir müssen uns klar werden, welcher Anteil der effektiven WW am stärksten ist:

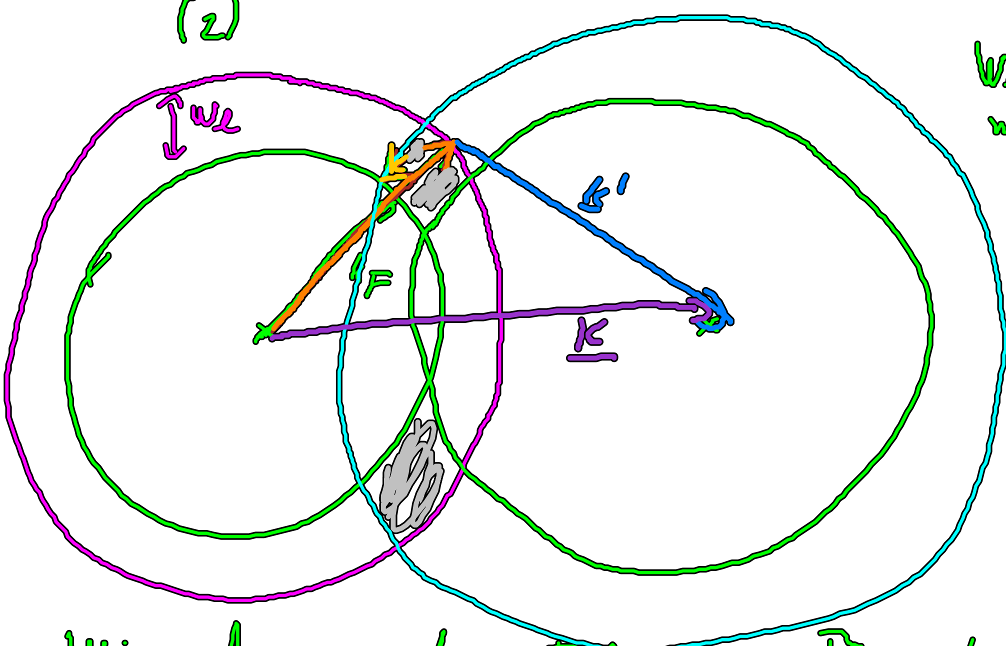
$$H_{WW} = \sum_{k\tilde{k}q} \tilde{V}_{\tilde{k}q}\, a^\dagger_{k+q}\, a^\dagger_{\tilde{k}-q}\, a_{\tilde{k}}\, a_k$$

Folgende Beiträge:

(1) $V_{\tilde{k}q} \simeq -V_0$ ← ungefähr konstant

Nur der Bereich, wo WW anziehend ist.
Also nicht weit von der Fermi-Kante

(2)



Wechselwirkung kann nur außerhalb der Fermikugel erfolgen, dort nur mit den Energien $E(k) \le E_F + \hbar\omega_D$

Größter Überlapp der Bereiche, wenn $K = 0$!

Wir nehmen nur den Fall $\underline{k} = -\underline{\tilde{k}}$ mit
Also Paare mit verschwindendem Gesamtimpuls $\underline{K} = \underline{k} + \underline{\tilde{k}} = 0$

Also:

$$H_{WW} = -V_0 \sum_{kq\sigma} a^{+}_{k+q,\sigma}\, a^{+}_{-k-q,-\sigma}\, a_{-k-\sigma}\, a_{k\sigma}$$

Spin

Mit der Nebenbedingung
$V_0 \neq 0$ für $|E(k+q) - E(k)| \leq \hbar\omega_q$

Sowie $H_0 = \sum_{kq} E(k)\, a^{+}_{k\sigma} a_{k\sigma}$

Errinnerung an statische Physik, großkanonisches Potential (Variieren der Teilchen)!

$$\Rightarrow \quad H \rightarrow H - E_F N$$

$$\Rightarrow \quad H_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon(k)\, a^{+}_{k\sigma} a_{k\sigma}$$

$$\varepsilon(k) = E(k) - E_F$$

Um warm zu werden, betrachten wir zuerst den Fall ohne WW.

$$\alpha_{k,\sigma} = u_k a_{k\sigma} - v_k a^{+}_{-k-\sigma} \qquad \alpha_{-k,-\sigma} = u_k a_{-k,-\sigma} + v_k a^{+}_{k\sigma}$$

$$\alpha^{+}_{k,\sigma} = u_k a^{+}_{k\sigma} - v_k a_{-k-\sigma} \qquad \alpha^{+}_{-k,-\sigma} = u_k a^{+}_{-k-\sigma} + v_k a_{k,\sigma}$$

Falls wir die Bedingungen $u_{k\sigma}^2 + v_{k\sigma}^2 = 1$ und $u_{k\sigma} = u_{-k-\sigma}$, $v_{k\sigma} = -v_{-k,-\sigma}$ stellen, bleiben Fermi Vertauschungsrelationen erhalten (ÜA)

(Bogoliubov-Valatin Transformation)

Inverse Transformation (ÜA):

$$a_{k\sigma} = u_k \alpha_{k,\sigma} + v_k \alpha^{+}_{-k-\sigma} \qquad a_{-k-\sigma} = u_k \alpha_{-k,-\sigma} - v_k \alpha^{+}_{k\sigma}$$

$$a^{+}_{k\sigma} = u_k \alpha^{+}_{k,\sigma} + v_k \alpha_{-k-\sigma} \qquad a^{+}_{-k-\sigma} = u_k \alpha^{+}_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma}$$

H_0 umformulieren:

$$H_0 = \sum_k \varepsilon(k) \left(a^{+}_{k+} a_{k+} + a^{+}_{-k-} a_{-k-} \right)$$

$$= \sum_k \varepsilon(k) \Big\{ \left(u_k \alpha^{+}_{k\sigma} + v_k \alpha_{-k\sigma} \right)\left(u_k \alpha_{k\sigma} + v_k \alpha^{+}_{-k\sigma} \right) + \left(u_k \alpha^{+}_{-k-\sigma} - v_k \alpha_{k\sigma} \right)\left(u_k \alpha_{-k-\sigma} - v_{k\sigma} \alpha^{+}_{k,\sigma} \right)$$

$$= \sum_k \varepsilon(k)\,\Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha^+_{k\sigma}\alpha_{k\sigma} + \alpha^+_{-k-\sigma}\alpha_{-k-\sigma}) + 2u_kv_k(\alpha^+_{k\sigma}\alpha^+_{-k-\sigma} + \alpha_{-k-\sigma}\alpha_{k\sigma})\Big)$$

Die Idee ist, dass die α Operatoren Anregungen aus dem Grundzustand erzeugen (Ersatz Vacuum)

Also $\alpha_{k\sigma}|0\rangle = 0$

$$\prod_k \alpha_{k+}\alpha_{-k-}|vac\rangle = \prod_k (u_k a_{k+} - v_k a^+_{-k-})(u_k a_{-k-} + v_k a^+_{k+})|vac\rangle$$

$$= \prod_k \Big(u_k^2 \cancel{a_{k+}a_{-k-}} + u_kv_k(\underbrace{a_{k+}a^+_{k+}}_{1-\cancel{a^+_{k+}a_{k+}}} - \cancel{a^+_{-k-}a_{-k-}}) + v_k^2 a^+_{k+}a^+_{-k-}\Big)|vac\rangle$$

$$= \prod_k (u_kv_k + v_k^2 a^+_{k+}a^+_{-k-})|vac\rangle$$

ÜA + Normierung

$$\Rightarrow |0\rangle = \prod_k (u_k + v_k a^+_k a^+_{-k})|vac\rangle$$ Normalisierter Grundzustand

Wir müssen u_k, v_k so wählen, dass $H_0|0\rangle$ Minimal

Wechselwirkung soll verschwinden

$$2u_kv_k(\alpha^+_k\alpha^+_{-k} + \alpha_{-k-}\alpha_k)|0\rangle = 0$$

Falls $u_kv_k = 0$ 1. Forderung

$$(u_k^2 - v_k^2)(\underbrace{\alpha^+_{k+}\alpha_{k+}}_{0!} + \underbrace{\alpha^+_{-k-}\alpha_{-k-}}_{0!})|0\rangle$$ ist automatisch!

Bleibt

$$\sum_k \varepsilon(k)\,2v_k^2$$

Setzt $v_k = 1$ für $k \le k_F$

und $v_k = 0$ für $k \ge k_F$

Wichtig $N = \langle 0|\hat N|0\rangle = \sum_k 2v_k^2$ wird dann die Teilchenzahl fixiert.

Jetzt auch Wechselwirkung einbeziehen

Also:

$$H = \sum_{k\sigma}\varepsilon(k)(a^+_{k\sigma}a_{k\sigma}) - V_0\sum_{kq\sigma} a^+_{k+q\sigma}a^+_{-k-q-\sigma}a_{-k-\sigma}a_{k\sigma}$$

Transformiert auf α, α^+ Operatoren!

$$H = \sum_k \varepsilon(k)\Big(2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(\alpha_k^+\alpha_k + \alpha_{-k}^+\alpha_{-k}) + 2u_kv_k(\alpha_k^+\alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k}\alpha_k)\Big)$$

$$- V_0 \sum_{kk'} \Big[u_kv_ku_{k'}v_{k'}(1 - \alpha_{-k'}^+\alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+\alpha_{k'})(1 - \alpha_{-k}^+\alpha_{-k} - \alpha_k^+\alpha_k)$$

$$+ (u_k^2 - v_k^2)u_{k'}v_{k'}(1 - \alpha_{-k'}^+\alpha_{-k'} - \alpha_{k'}^+\alpha_{k'})(\alpha_{-k}\alpha_k + \alpha_k^+\alpha_{-k}^+)$$

Grundzustand anwenden

$$+ (u_k^2\alpha_{-k}\alpha_k - v_k^2\alpha_k^+\alpha_{-k}^+)(u_{k'}^2\alpha_{k'}^+\alpha_{-k'}^+ - v_{k'}^2\alpha_{-k'}\alpha_{k'})\Big]$$

$$H|0\rangle = \Big[2\sum_k \varepsilon(k)v_k^2 - V_0\sum_{kk'} u_kv_ku_{k'}v_{k'} + \sum_k \big[\underbrace{2u_kv_k\varepsilon(k) - (u_k^2 - v_k^2)V_0\sum_{k'}u_{k'}v_{k'}}_{*}\big](\alpha_k^+\alpha_{-k}^+ + \alpha_{-k}\alpha_k)\Big]|0\rangle$$

Damit α gute nicht wechselwirkende Teilchen beschreibt:

$$\sum_{k'} u_{k'}v_{k'} =: \frac{\Delta}{V_0}$$

Für $* = 0$ muß dann

$$2u_kv_k\varepsilon(k) = \Delta(u_k^2 - v_k^2)$$

ÜA Ansatz $u_k^2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_k)$ und $v_k^2 = \frac{1}{2}(1 - \xi_k)$

$u_k^2 + v_k^2 = 1$ sofort erfüllt ist.

$$\xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

Wir müssen Δ bestimmen

$$\Delta = V\sum_{k'} u_{k'}v_{k'} = \frac{V}{2}\sum_k \sqrt{1 - \xi_k^2} = \frac{V}{2}\sum_k \frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k) + \Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2}\sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}$$

$$1 = \frac{V_0}{2}\int_{-\hbar\omega_{ph}}^{\hbar\omega_{ph}} d\varepsilon\, \underbrace{Z(\varepsilon)}_{\approx Z(\varepsilon_F)=Z_0}\, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}$$

Nach Δ umstellen

$$1 = V_0 Z_0 \,\mathrm{Arcsinh}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta}\right)$$

$$\Delta = \hbar\omega_D \frac{1}{\sinh\frac{1}{V_0 Z_0}} \underset{\text{für kleine } V_0}{\approx} 2\hbar\omega_D \cdot e^{-\frac{1}{V_0 Z_0}}$$

Das Ergebnis gibt Störungstheorie

Δ stellt sich als Bindungsenergie heraus

XI.3 Angeregte Zustände

Für die angeregten Zustände

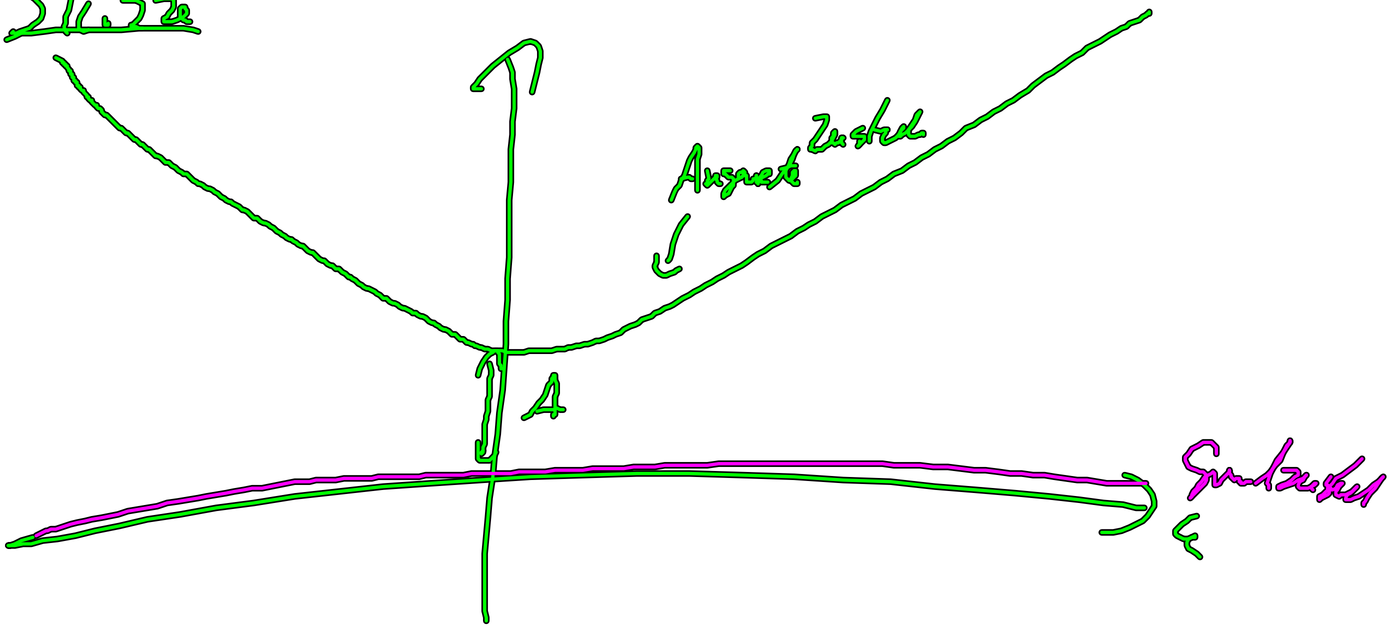
$$H = \dots + \sum_k \left[\varepsilon(k)(u_k^2 - v_k^2) + V_0\sum_{k'} 2 u_k v_k u_{k'} v_{k'}\right](\alpha_k^\dagger\alpha_k + \alpha_{-k}^\dagger\alpha_{-k}) + \dots$$

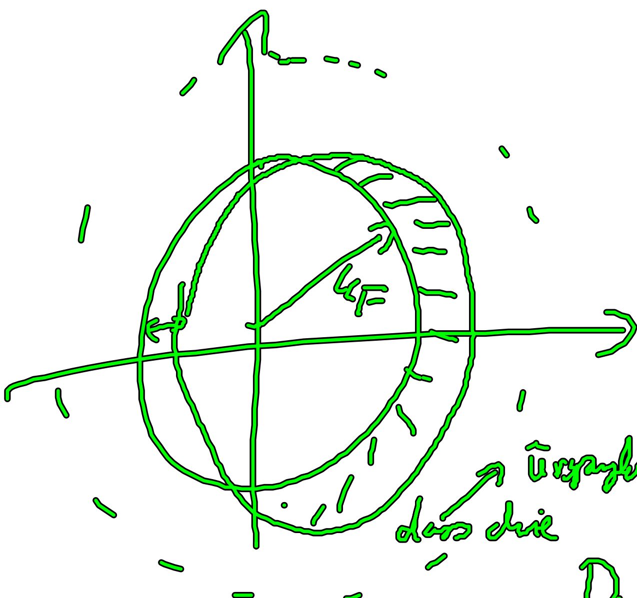
Für die Besetzung $(n_{k\uparrow}, n_{-k\downarrow})$

$$E - E_0 = \sum_k \left[\varepsilon(k)\underbrace{(u_k^2-v_k^2)}_{\frac{\Delta}{2}\ \xi_k = \frac{\varepsilon(k)}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}} + 2\underbrace{\Delta u_k v_k}_{\frac{\Delta}{2}\frac{\Delta}{\sqrt{\varepsilon^2(k)+\Delta^2}}}\right](n_{k\uparrow}+n_{-k\downarrow})$$

$$= \sum_k \sqrt{\xi_k^2 + \Delta^2}\; n_k$$

Skizze





Ein strom führender Zustand verschiebt die Fermikugel. Sobald die Verschiebung passiert, führen Streuprozesse, die Zustände auf die alte Fermikugel zurück.

Im Supraleitenden Zustand, verlangt die Energieerhaltung, dass die übertragene Energie mindestens 2Δ über der finalen Energie liegt.

Damit kann eine kleine Verschiebung keine Streuung erfahren.

Daher wird für die Streuung eine Mindestenergie benötigt, daher die Sprungtemperatur.