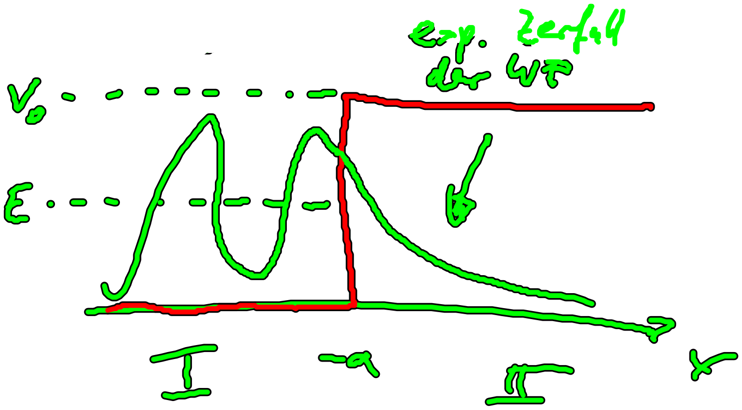
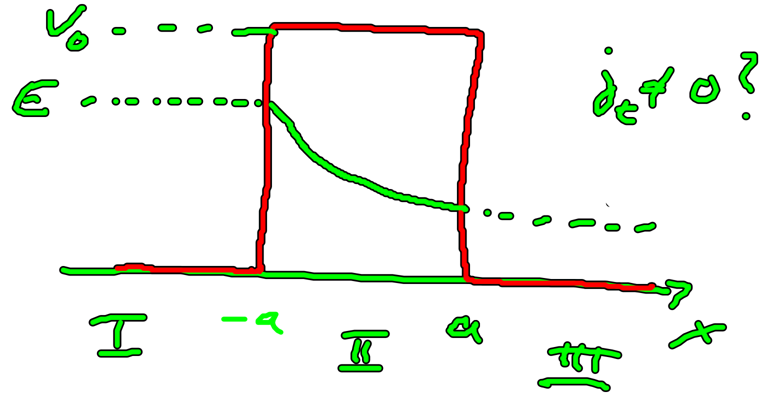
1.4. Der quantenmechanische Tunneleffekt

• Situation:

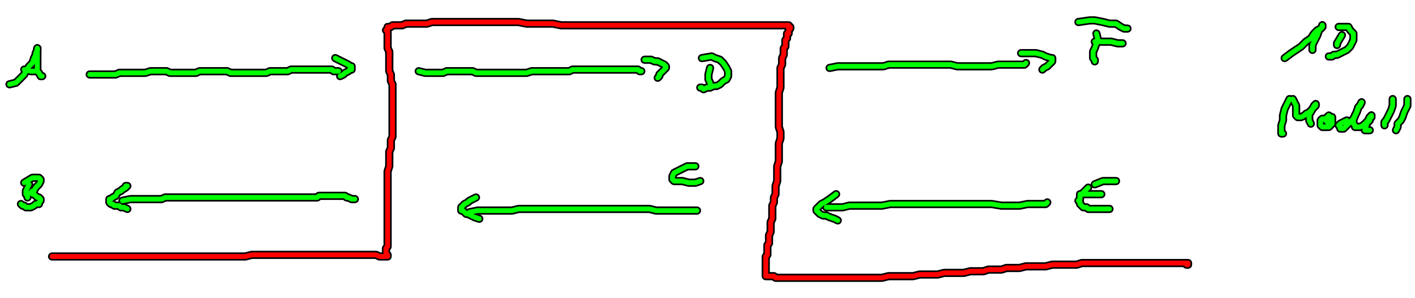




• Frage:

Kann ein qm Teilchen, das bei $x = -a$ „reflektiert" wird ($E < V_0$) durch eine Potentialschwelle mit $\Delta x = 2a$ gelangen und sich bei $x > a$ weiterbewegen?

Wenn ja: „Tunneln durch die Barriere"



→ Berechnung der Transmissionsamplitude F für eine eingestrahlte Amplitude A

• allgm. Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx} & x < -a \\ C\, e^{-\varkappa x} + D\, e^{+\varkappa x} & -a \leq x \leq +a \\ F\, e^{ikx} + E\, e^{-ikx} & x > a \end{cases}$$

mit $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\varkappa = \sqrt{2m\underbrace{(V_0 - E)}_{>0}}/\hbar$

- Bestimmung der Koeffizienten durch Randbed. von ψ: Stetigkeit von ψ, ψ' an beiden Grenzflächen

- phys. Annahmen:
  - kein einlaufendes Teilchen von rechts : $E = 0$
  - einlaufendes Teilchen von links (Norm.): $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow$ 4 Gl. für 4 Unbekannte $\boxed{\text{ÜA}}$

- komplexe Transmissionsfunktion:

$$S(E) = \frac{F}{A} = \frac{1}{\left(\cosh(2\varkappa a) + \frac{i\varepsilon}{2}\sinh(2\varkappa a)\right) e^{2ika}}$$

mit $\varepsilon = \frac{\varkappa}{k} - \frac{k}{\varkappa}$

- Frage: Was ist die AWdichte $|\psi|^2$ bei $x > a$?

$|\psi(x>a)|^2 = |F|^2 \sim |S(E)|^2$

$$|S(E)|^2 = \left[\cosh^2(2\varkappa a) + \frac{\varepsilon^2}{4}\sinh^2(2\varkappa a)\right]^{-1}$$

kein exp. Abfall

$$= \left[1 + \left(1+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)\sinh^2(2\varkappa a)\right]^{-1} = \text{const} \neq 0$$

Wir haben $|S(E)|^2$ als Transmission für die Aufdichte rechts von der Barriere.

- Bemerkungen:

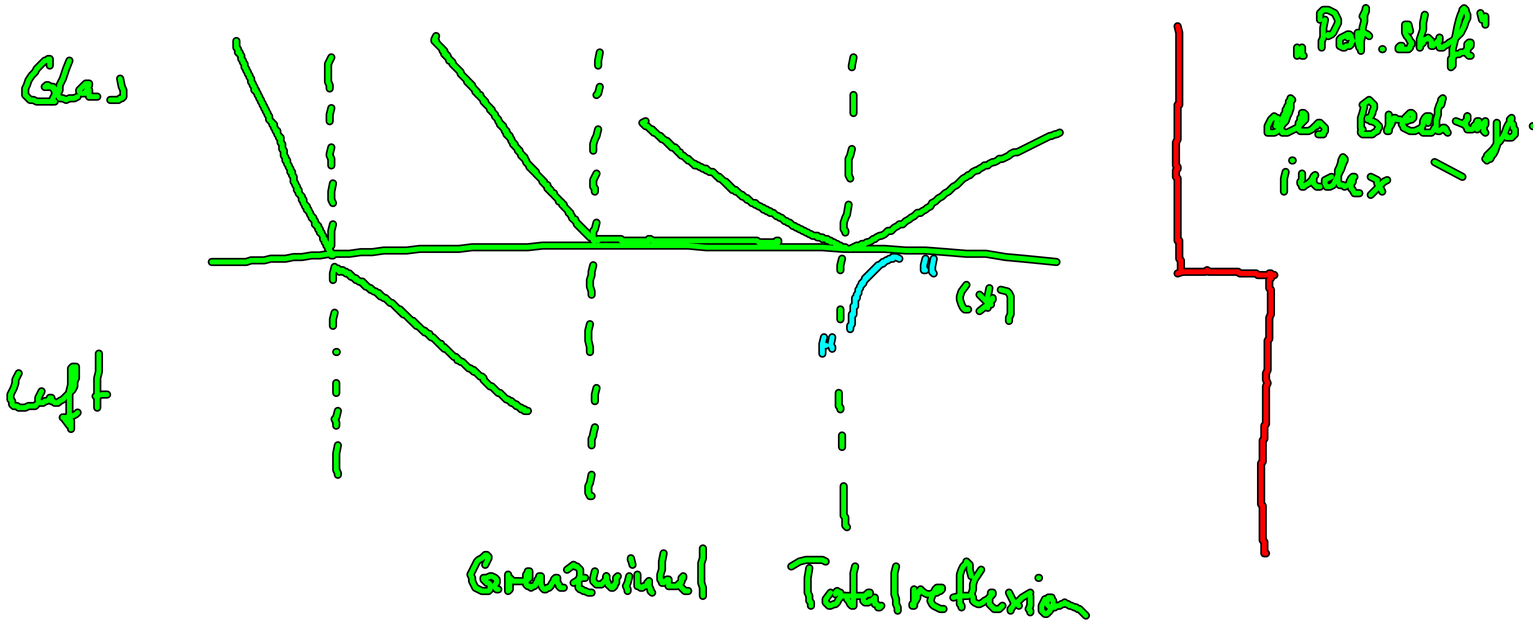
(i) Es ex. im gesamten Raum rechts der Barriere eine endliche AWD $\rho(x) = |\psi(x)|^2 \sim S^2$ obwohl $E < V_0$

$\longrightarrow$ Tunneleffekt ist ein qm. Phänomen

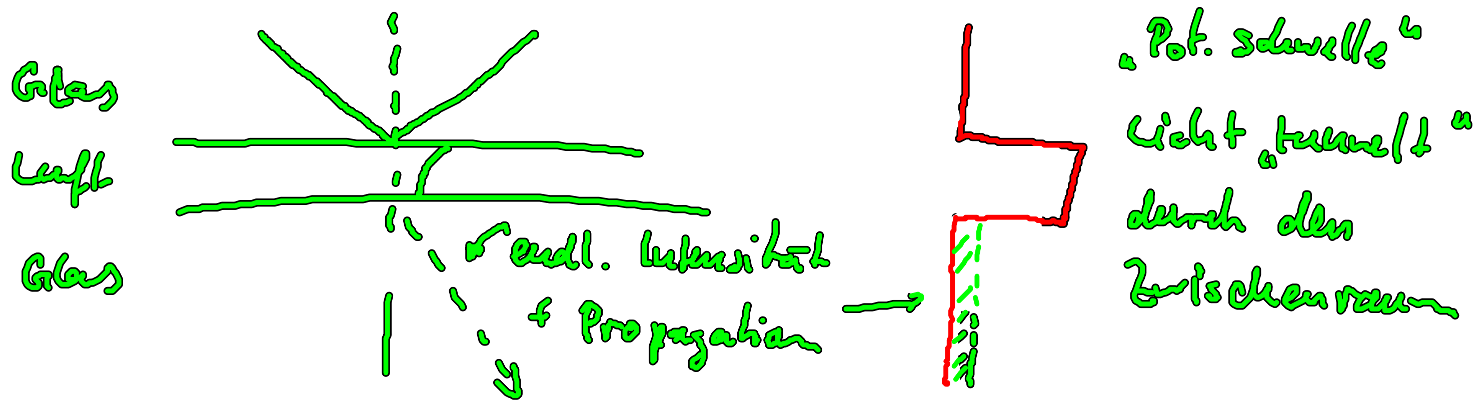
(ii) Der Grenzfall $\varkappa a \to \infty$ (hohe & lange Barrier) gibt den klass. Grenzfall $|S|^2 \to 0$ (Totalreflexion)

(iii) $|S(E)|^2 \sim e^{-4\varkappa a}$, ist der erste Korrekturterm ($\varkappa a \gg 1$). Also die Tunnelwahrscheinlichkeit nimmt ab, wenn E abnimmt ($\varkappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar$)

(iv) klass. Analogie zum Tunneleffekt ist sogenanntes „evaneszentes Licht"



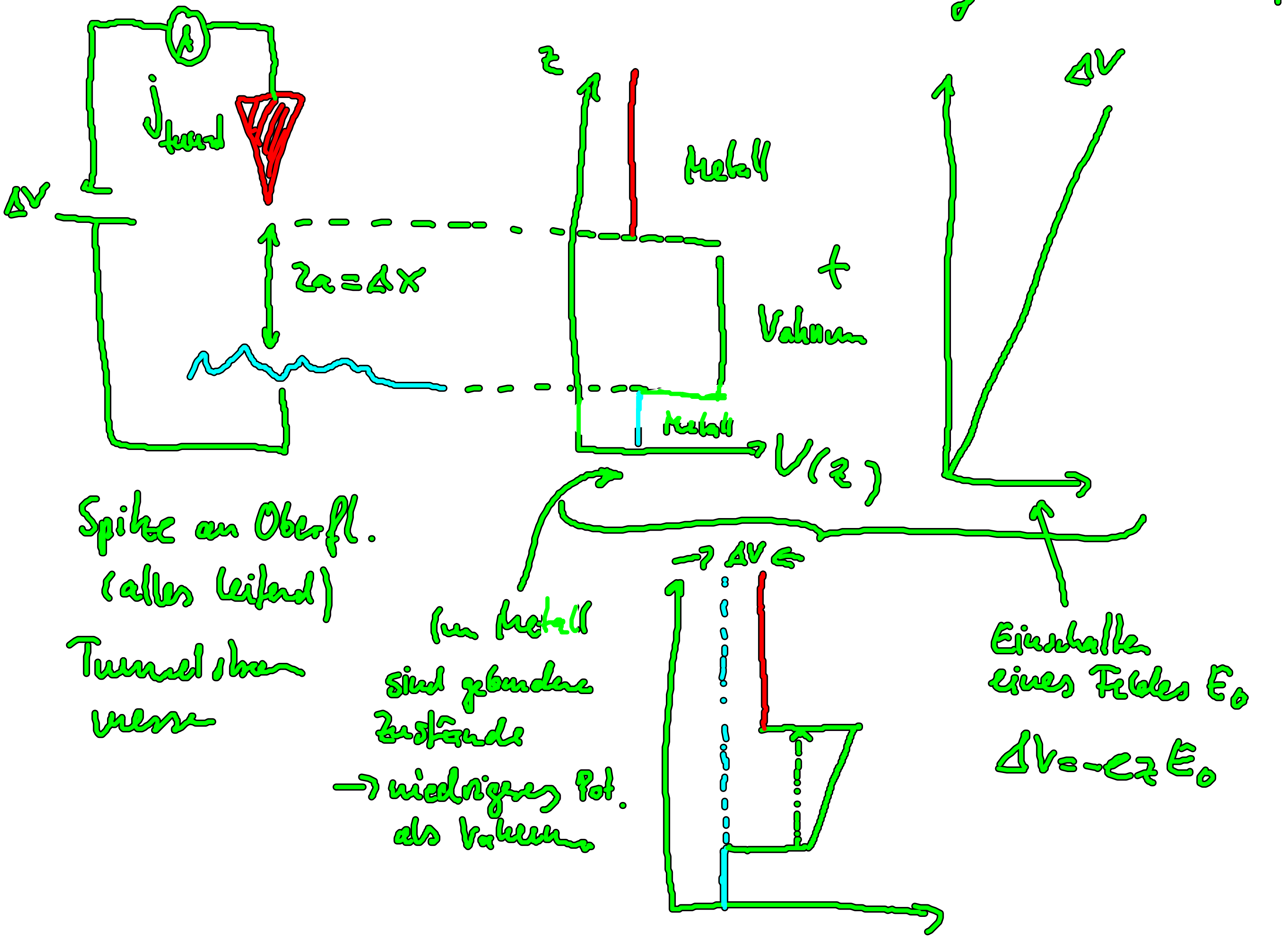
(*) Licht kann **NICHT** im Außenraum propagieren (ausbreiten), aber die Maxwell-Gl. zeigen ein sogen. „evaneszentes" Feld, also exp. abklingend und nicht propagierend



- Anwendungen zum Tunneleffekt:

(1) Rastertunnel-Mikroskop:

Metallspitze als Sonde zur Untersuchung von Metalloberfl.



- man benötigt „sehr starke" el. Felder um einen meßbaren Tunneleff. zu erzeugen
- Feldüberhöhung an spitzen Gegenständen (Metallende)
- beim Abtasten 2 Betriebsmodi:

(a) $j_{tunnel} = const$, man mißt Δx

(b) $\Delta x = const$, man mißt j_{tunnel}

} Abb. der Metalloberf.

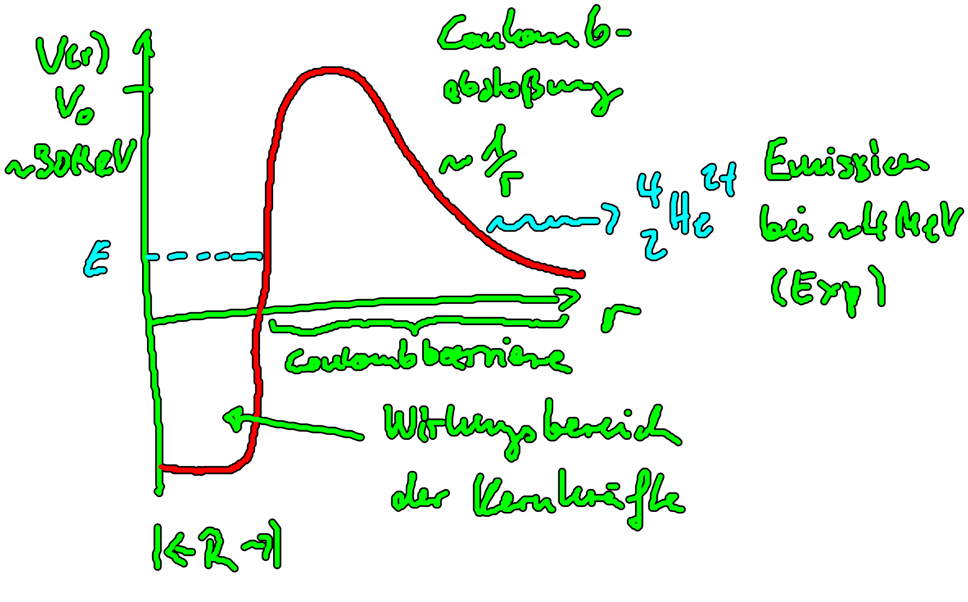
- Elektronen müssen nicht aus der Oberfl. heraus-gelöst werden, sondern können Vakuumbarriere durchtunneln und so zum Strom beitragen

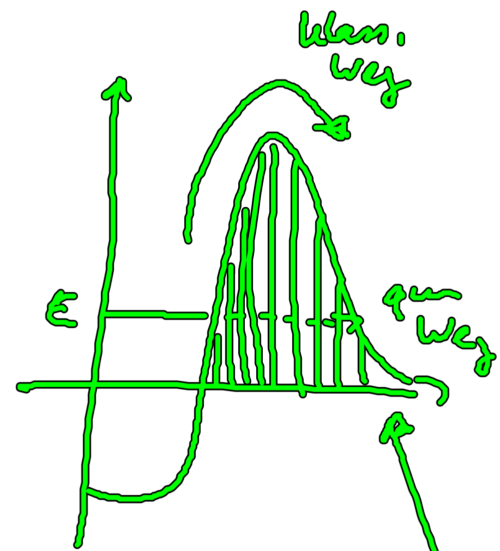
(iii) α-Zerfall

- α-Radioaktivität:

  α-Teilchen ($^{4}_{2}He^{2+}$) können von schweren Atomkernen emittiert werden

α-Teilchen sieht mittleres Pot. von allen anderen Teilchen im Atomkern:





- Problem: $V_0 > E_\alpha$ (30 > 4), da im klass. Fall mind. die Energie V_0 nötig wäre um die Coulomb-barriere zu überwinden

- Ansatz: Zerlegen $V(r)$ in viele kleine Pot.schwelle
(Gamow 1928)
→ Damit Berechnung der Tunnelwahr. + Halbwertszeiten

- Halbwertszeit $\tau_{1/2}$ eines α-Teilchens um aus einem Kern mit Ladungszahl Z_1 auszutreten:

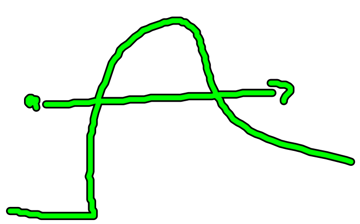
$$\log_{10}(\tau_{1/2}) = 1{,}61\cdot\left(\frac{Z_1}{E^{1/2}} - Z_1^{2/3}\right) - 28.9$$

$\tau_{1/2}$ in Jahren, E in MeV

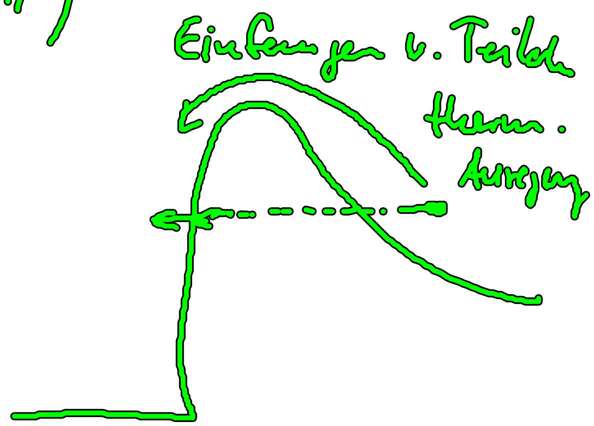
- Stärke der Theorie: $\sqrt{E}$-Abh. exp. nachgewiesen

(iii) Kernfusion (inverser α-Zerfall)

- umgekehrter Standpunkt
statt Emission



Teilchen verläßt Kern



Teilchen tritt in Kern ein

- auch hier bestimmt $|S(E)|^2$ die Transmissionsw., d.h. die Wkl. der Fusion zweier Kerne, da die Coulombbarriere zu hoch ist, um mit therm. Energie überbrückt zu werden

- damit Tunneln effektiv: - kleine Kernladungszahlen
  - große Energie E

- Bsp.: Wasserstoff

$${}^2_1H + {}^3_1H \longrightarrow {}^4_2He + n \quad 17{,}6\ \text{MeV}$$

frei werdende Bindungsen.

Sterne: therm. Energie < Coulombbarriere (Tunnelprozesse wichtig)

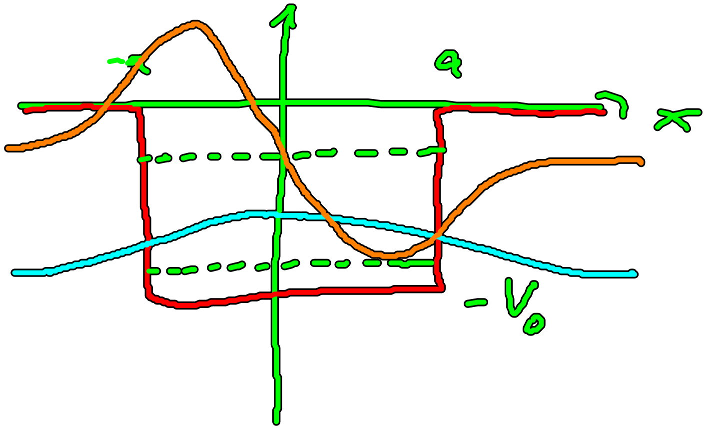
Im Sternen werden zu Beginn der Entwicklung die leichten Elemente verbrannt (Tunnelprozesse werden mit zunehmenden Z immer schwerer → Coulombwall)

1.5 Der endlich tiefe Potentialtopf

Modellsystem für kurzreichweitige Kräfte (Kernphysik, Störstellen im Festkörper, große Moleküle)

- Potentialverlauf: $V(x) = -V_0\,\Theta(a-|x|)$ $\begin{pmatrix} 1: & a > |x| \\ 0: & a < |x| \end{pmatrix}$

(i) gebundene Zustände: $-V_0 \leq E \leq 0$



- am Topf lokalisierte Zustände
- sind evaneszent (ex. auch außerhalb d. Topfes)
- Teilchen werden stärker gebunden, je
  (a) höher die Masse m ist (m)
  (b) tiefer der Topf ist (V_0)
  (c) breiter — " — (a)

⟶ Grenzfall ∞-tiefer Topf alle Zustände gebunden

- Wellenfkt.: aus SGl.

- außerhalb ($V=0$): $\psi'' = \varkappa^2 \psi \longrightarrow \psi \sim e^{-\varkappa x}$
  (exp. Abfall)
  innerhalb ($V=-V_0$): $\psi'' = -q^2 \psi \longrightarrow \psi \sim e^{\pm i q x}$
  (oszillierend)

$$q = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$$

- es ex. gerade und ungerade Lsg, müssen noch normiert werden + Stetigkeitsbed.:

$$\psi_g = \begin{cases} A_1 \cos(qx) & |x| < a \\ A_2\, e^{\mp \varkappa x} & x \gtrless \pm a \end{cases} \qquad \psi_u = \cos \to \sin$$

• Energieniveaus: aus Stetig.bed

→ transzendente Best.gl.

$$\boxed{\tan(qa) = \frac{(\zeta^2 - q^2a^2)^{1/2}}{qa}} \qquad \zeta = \frac{(2mV_0)^{1/2}\, a}{\hbar}$$

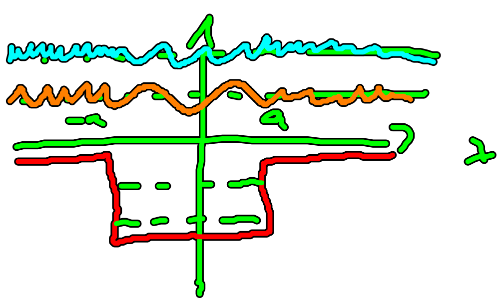
ζ - dim.los und Maß für Stärke des Topfes

(je größer ζ desto stärker lokalisiert)

- verschieden viele Lsg. für versch. ζ

→ wenn $\zeta > 0$ immer mind. eine geraden gebundenen Zustand

(ii) ungebundene Zustände: $E > 0$



- sind nicht lokalisiert
- sind propagieren

. Wellenfkt:

außerhalb $(V=0)$: $\psi \sim e^{\pm ikx}$ $\quad k = \sqrt{2mE}/\hbar$

innerhalb $(V=-V_0)$: $\psi \sim e^{\pm iqx}$ $\quad q = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$