

2. Harmonischer Oszillator

2.1. Eigenwertproblem

harmonische Oszillatoren als Beispiel für verschiedene Systeme: Licht, Molekülschwingungen etc.

Mass m , Frequenz ω , eindimensional

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \quad \rightarrow \quad H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

klassisch
Kontinuum

Quantentheorie: $P = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ und $\underline{x} = x \Rightarrow \underline{H}$

neue Operatoren a, a^\dagger zur Lösung: Liko von Ort / Impuls

$$\left. \begin{matrix} a \\ a^\dagger \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x \pm i \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} P \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x \pm \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \frac{d}{dx} \right\}$$

a) Kommutatorrelation:

$$a a^\dagger - \underline{a^\dagger a} = \underline{[a, a^\dagger]} = \frac{i}{\hbar} [p, x] = \underline{1}$$

\downarrow $\dot{u}A$

b) Hamiltonian in Erzeugen und Vernichten

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} \hbar\omega \right)$$

umstelle nach \underline{H} :

$$\underline{H} = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

Darstellg. d. H in Leiteroperatoren a^\dagger, a
(Begründg. später)

c) Eigenwertproblem:

$$\text{erster Schritt: } \underbrace{a^\dagger a}_{\text{Operator}} \underbrace{u_1(x)}_{\text{EF}} = \lambda \underbrace{u_1(x)}_{\text{EF}} \quad \text{mit } \lambda \text{'s}$$

\downarrow \downarrow

EW EF EW EF

λ, u sind gesucht.

(i) $\lambda \geq 0$, d.h. positives Spektrum:

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, u_1^*(x) \overbrace{a^\dagger a}^{\lambda u_1} u_1(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \underbrace{|u_1(x)|^2}_{=1} = \lambda$$

$a^\dagger(x, \frac{d}{dx})$

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \left(u_1^*(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x - \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \frac{d}{dx} \right] a u_1(x) \right)$$

partielle Integration

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \underbrace{a u_1^*(x)}_{(a u_1(x))^*} a u_1(x)$$

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, |a u_1(x)|^2 \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Die Eigenwerte von $a^\dagger a$ sind ≥ 0 !

(ii) welche λ 's kommen in Folge?

Wenn u_λ EF zu EW λ ist ($a^t a u_\lambda = \lambda u_\lambda$), so

$a^t u_\lambda$ auch EF zu $\lambda + 1$ ($a^t a (a^t u_\lambda) = (\lambda + 1) a^t u_\lambda$)
Behauptung.

Teil:

$$\underline{a^t a (a^t u_\lambda)} = a^t \underbrace{a a^t}_{1} u_\lambda$$

weil:
 $a a^t - a^t a = 1$

$$= a^t (1 + a^t a) u_\lambda = a^t u_\lambda + \underbrace{a^t a a^t u_\lambda}_{\lambda u_\lambda}$$

$$= a^t (1 + \lambda) u_\lambda = \underline{(1 + \lambda) a^t u_\lambda}$$

also ist $a^t u_\lambda$ EF zu EW $\lambda + 1$

Wenn man das μ -mal macht

$$(a^t)^\mu u_\lambda = u_{\lambda + \mu}$$

$$a^t u_\lambda = u_{\lambda + 1}$$

analoge Reduz.:

$$a^\mu u_\lambda = u_{\lambda-\mu}$$
$$a u_\lambda = u_{\lambda-1}$$

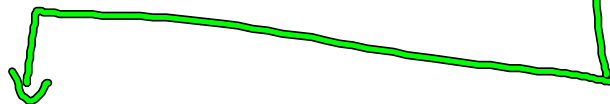
Per Auftrieb sind die λ 's odd $\Delta \lambda = \pm 1$

(iii) Die Folge $a u_\lambda, a^2 u_\lambda, a^3 u_\lambda, \dots, a^\mu u_\lambda$
kann abbrechen, denn irgendwann wird $\lambda - \mu < 0$
z.B. $\lambda = 10, \mu = 11$ ergibt $\lambda - \mu = -1$ und darf
nicht existieren.

fordern: $a u_0(x) \stackrel{!}{=} 0$

das erfüllt $a^2 u_0(x) = 0$

Def. gl. f: $u_0(x)$



$$a^+ a u_0(x) = 0 \cdot u_0(x)$$

Eigenwertglg. f. u_0 zum Eigenwert 0.

Der kleinste Eigenwert $\lambda = 0$.

weil $\Delta \lambda = \pm 1$ sind alle λ ger. durch die

natürlichen Zahlen: 0, 1, 2, 3, 4, ...

(iv) Zustände:

$$u_n(x) = \alpha_n (a^+)^n u_0(x) \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

allerdings müssen diese Zustände normiert

→ \hat{u}_n

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n u_0(x)$$

(v) Bestimmung von $u_0(x)$:

$$a u_0(x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/2} x + \left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} \frac{d}{dx} \right) u_0(x) = 0$$

Diff. Gl. 1. Ordnung f. $u_0(x)$: Trennung d. Variablen

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$$

Der niedrigste Zustand d. Oszillators ist Gaußsche.

typisch Ausdehnung $\underbrace{\left(\frac{\hbar}{m\omega} \right)^{1/2}}_e \rightarrow e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{e} \right)^2}$

d) Zusammenfassung der Ergebnisse (H)

$$EF: u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n u_0(x)$$

$$EW: \varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

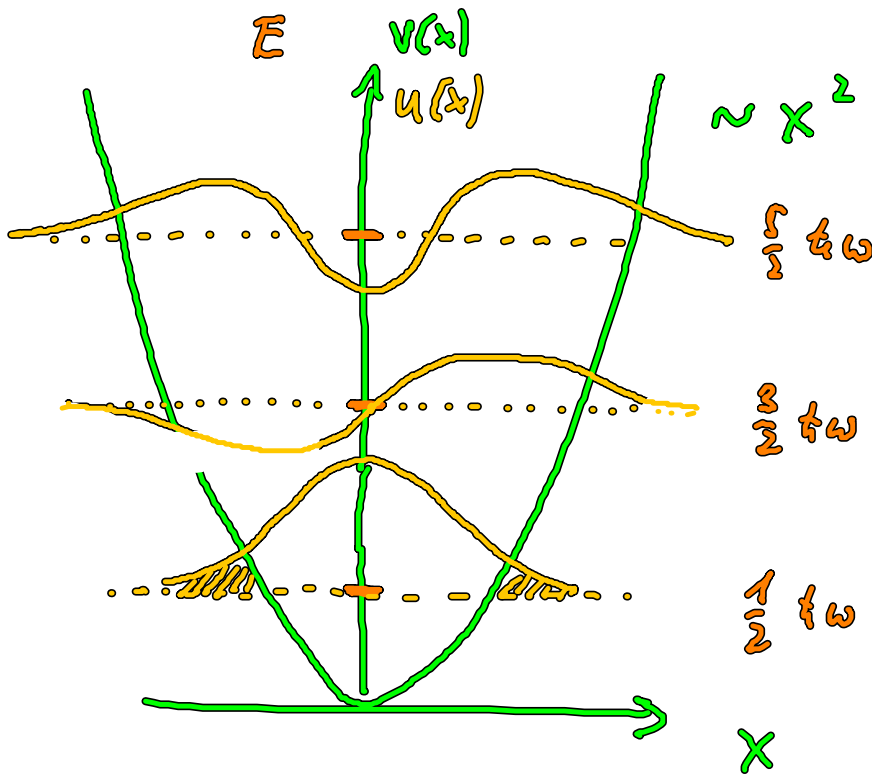
$$(n: 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\underline{H} u_n = \varepsilon_n u_n$$

Grundzustand: $\psi_0 \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ / $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$
 Gaußkurve / Nullpunktsenergie

u_n können rekursiv bestimmt werden:

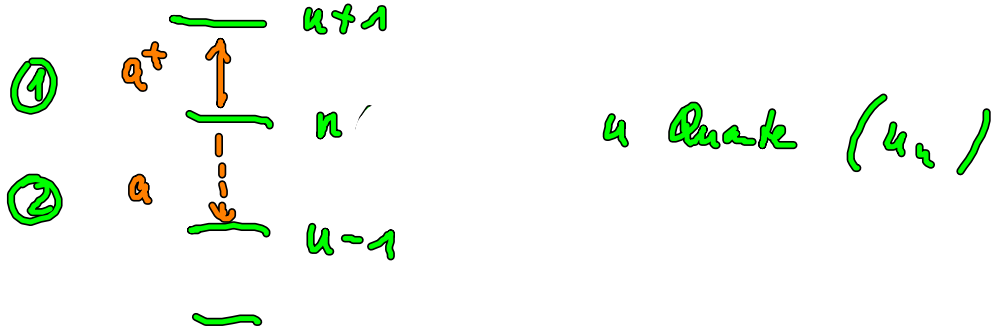
u_n sind die Hermite polynome H_n



e) Interpretation

a^\dagger, a nennt man Ladderoperatoren, weil sie

auf Zustände hinauf bzw. zurück von einem Zustand, selbste können



$$\textcircled{1} \quad a^\dagger u_n = a^\dagger \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n u_0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^{n+1} u_0$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} (a^\dagger)^{n+1} u_0$$

$$a^\dagger u_n = \sqrt{n+1} u_{n+1}$$

\nearrow
 erzeugt 1 Quant mehr " Erzeugoperator "

$$\textcircled{2} \quad a u_n = \sqrt{n} u_{n-1}$$

\nearrow
 entfernt 1 Quant " Vernichtungsoperator "

$a^\dagger a$ nennt man Teilchenzahloperator
(Quant)

$$a^\dagger a u_n = u_n u_n$$

↗

Teilchenzahl / Quantenzahl die
angeht ist

2.2. Einige vorgekommene Anwendungen

große Vielzahl v. Quanten ausgehend werden durch
harmonische Osz. beschrieben

atomares System:

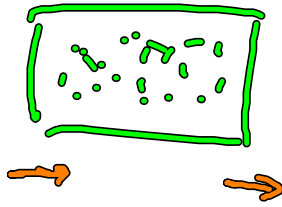
• Molekülschwingg. $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$

→ Normalschwingg. → „Vibration“
gekoppelt

• Festkörperschwingg. $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$

→ Normalschwingg. → „Phononen“
gekoppelt

• Elektronen gas



→ kollektive El-Schwingung → "Plasmonen"
f.

Feldern

Erzeugt / beschreibt formalismus ermöglicht

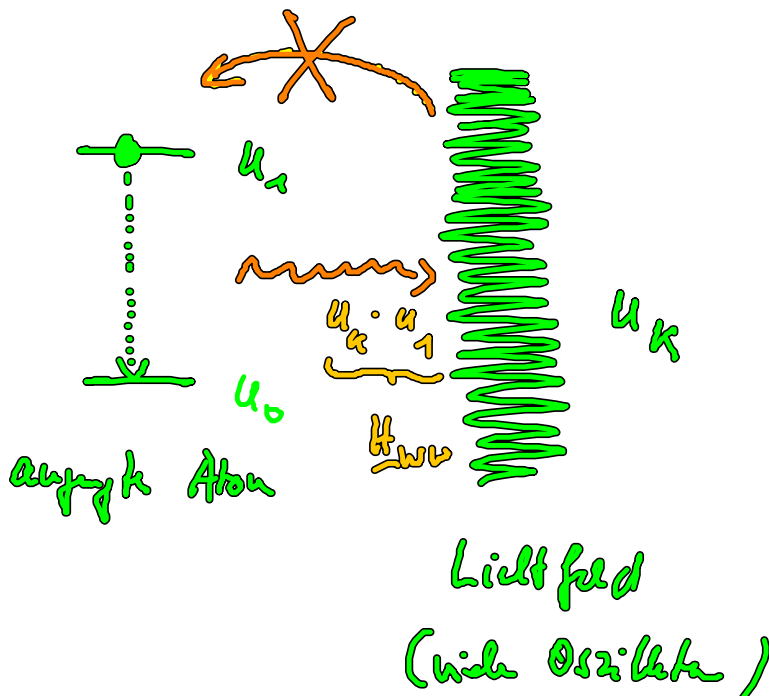
ein einheitlich Schreibweise f. Felder + Teilchen

(Spinorfeld, elektromagn. Feld, Schwerkraftfeld)

Wechselwirkung v. Feldern

wird als WW von Oszillatoren beschrieben

z.B.



3. Zweikörperproblem

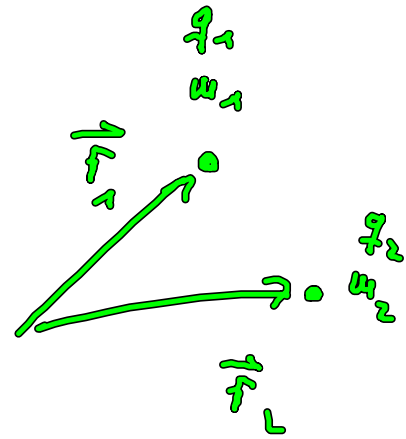
2 Teilchen + Coulomb WW in freiem Raum
(Zweikörperproblem auch Planetenbeweg.)

3.1. Schwerpunkt und Relativkoordinaten

Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

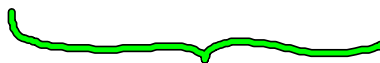
Coulomb WW oder
Lin und WW



Relativ und Schwerpunktskoordinaten:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{p} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{\Pi} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$



Relativ. Coord.

Schwerpunkt Coord.

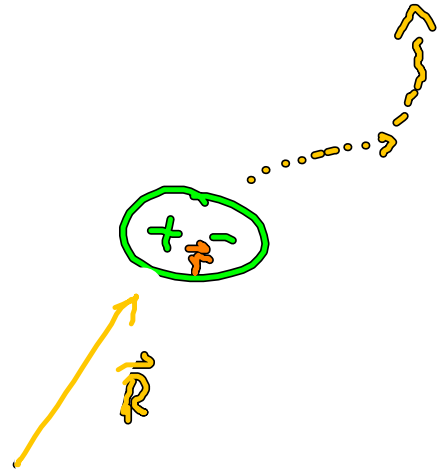
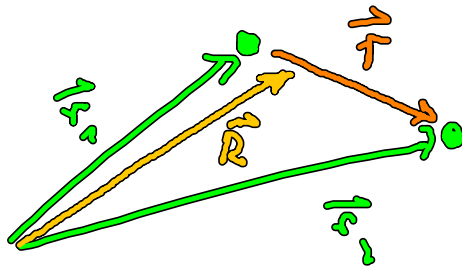
Übersch in H

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{P}^2}{2M} + V(r)$$

μ = reduzierte Masse: $\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$

M = Gesamtmasse: $m_1 + m_2$

Bsp: H-Atom



$$H \rightarrow \underline{H}$$