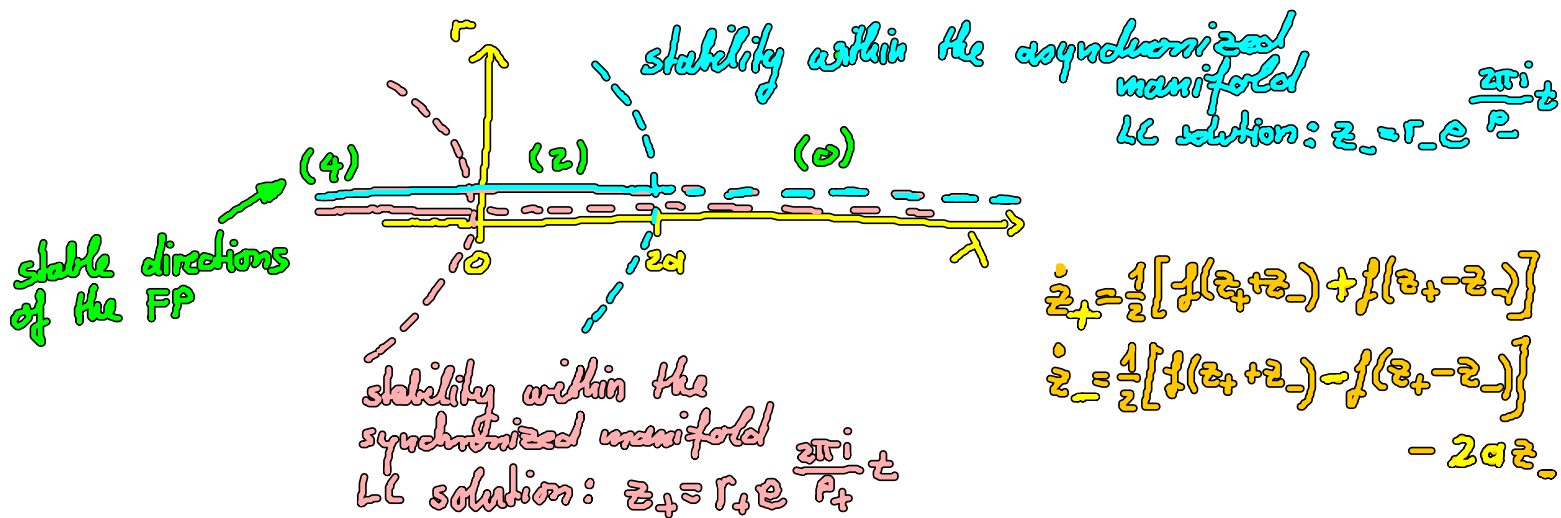


# English Summary →

- Delayed feedback control allows to control
  - unstable periodic orbits inside a chaotic attractor
  - spatio-temporal systems
    - periodic solutions in space: Turing patterns

## • 4.2. Two coupled oscillators (Hopf-normal forms) stability of fixed point (FP):



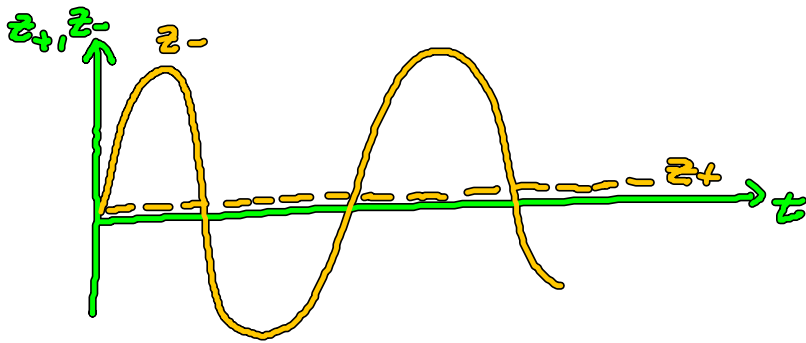
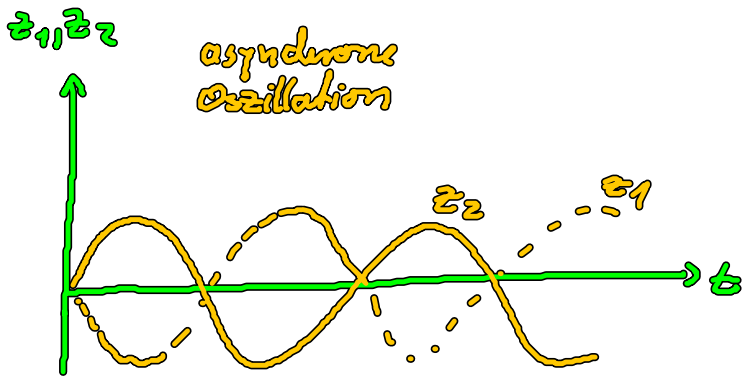
## 4.3. Stabilisierung periodischer Lösungen mit Delay

- (i)  $z_{synch}$  werde in 3.2.2. durch Wahl  $\tau = P_{+}$  stabilisiert
- (ii)  $z_{as}$  stabilisiert durch zeitverzögerte Rückkopp.  
mit  $\tau = \frac{P_{-}}{2}$

Begründung  $z_{-}(t - \tau) = z_{-}(t - \frac{P_{-}}{2}) = r_{-} e^{\frac{2\pi i}{P_{-}} (t - \frac{P_{-}}{2})}$

$$= r_- e^{\frac{2\pi i t}{P_-}} \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1}$$

$$= -z_-(t)$$



Systemgleichung mit nichtinvasiven Kontrolle reduziert auf asynchroner Lösung  $\tau = \frac{P_-}{2}$

$$(I) \quad \dot{z}_1 = f(z_1) + \alpha(z_2 - z_1) + b(z_2(t - \tau) - z_1(t))$$

$$(II) \quad \dot{z}_2 = f(z_2) + \alpha(z_1 - z_2) + b(z_1(t - \tau) - z_2(t))$$

NB: Kontrolle ist invasiv für den gleichphasigen Orbit

$$(I)' \quad \dot{z}_+ = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)) + b(z_+(t - \tau) - z_+(t))$$

$$(II)' \quad \dot{z}_- = \frac{1}{2}(f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)) - 2\alpha z_- - b(z_-(t - \tau) - z_-(t))$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von

$z_- = r_- e^{i\varphi}$  : Untersuchung der Stabilität des Fixpunktes im Ursprung

→ Linearisierung von  $I', II'$  um  $z_1 = z_2 = 0$   
 $z_+ = 0 = z_-$

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2} \left[ (\lambda+i)(z_+ + \bar{z}_-) + (\lambda+i)(z_+ - \bar{z}_-) \right] + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

$$f(z) = (\lambda+i + (1+i\mu)z) \cdot z$$

$$\dot{z}_+ = (\lambda+i)z_+ + b(z_+(t-\tau) - z_+(t))$$

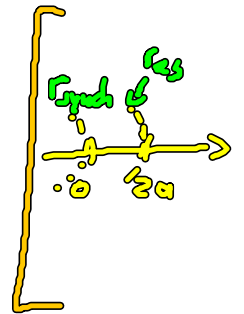
$$\dot{z}_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b(z_-(t-\tau) - z_-(t))$$

Linearisierung  
 entkoppelt  $z_+$  &  $z_-$

weiter Ansatz:  $z_{\pm} \sim e^{\eta t}$  ( $\eta$  Eigenwert)

Untersuchung der Stabilität bei  $\lambda = 2a$   
 mit  $\tau = \frac{p_-}{2}$

$$= \frac{2\pi}{2(1 - (\lambda - 2a)\tau)} = \pi$$



$z_+:$   
 $0 = \lambda + i + b(e^{-2\tau\eta} - 1) - \eta$   $(*)_+$

$z_-:$   
 $0 = 2a - 2a - i - b(e^{-\pi\eta} - 1) - \eta$   $(*)_-$   $b \in \mathbb{R}$

Suche Hopf-Kurven in Ebene  $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ , die  $\text{Re } \eta = 0$  erfüllen  
 d.h. Suche Grenzen, an denen sich die instabile Dimension des Fixpunktes ändert.

Parametrisierung der Hopf Kurven durch  
 $b = b(\omega)$   
 $\eta = 0 + i(1 + 2\omega)$

Einsetzen in  $(*)_-$  und  $(*)_+$

$$b_+(\omega) = 2 \frac{a - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i \omega)}$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i\omega)}$$

$$\lambda = 2\alpha$$

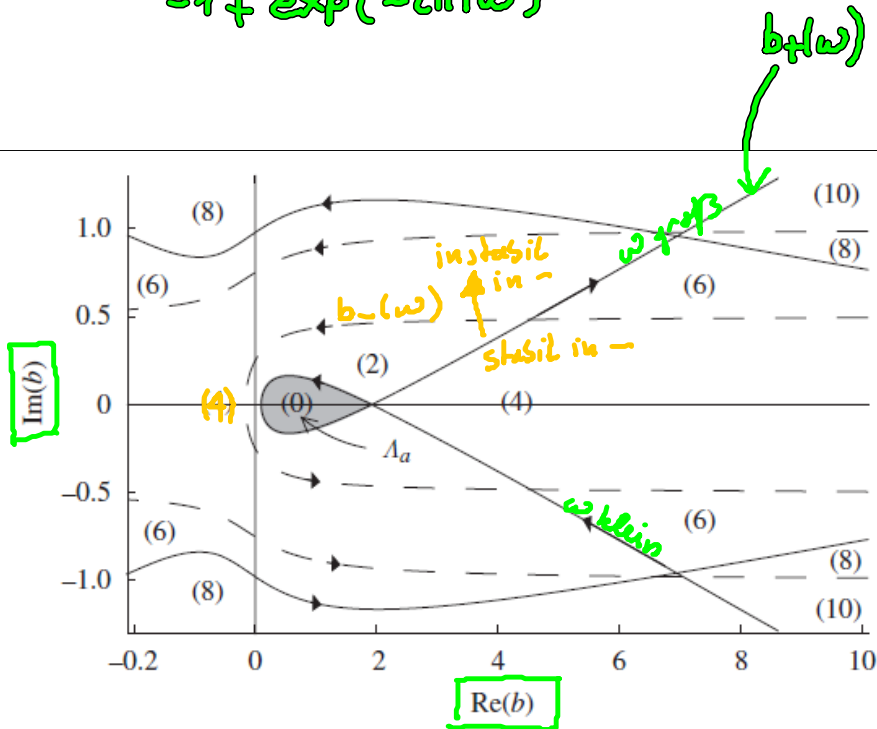
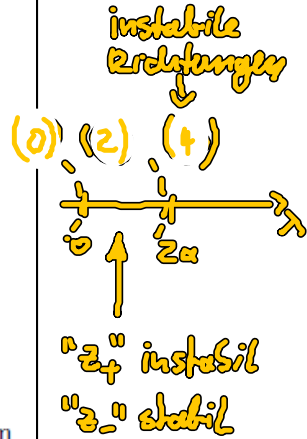
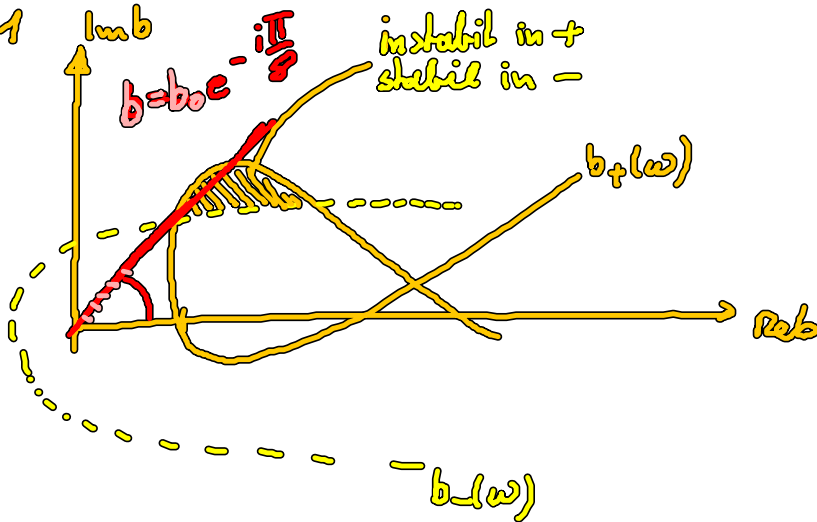
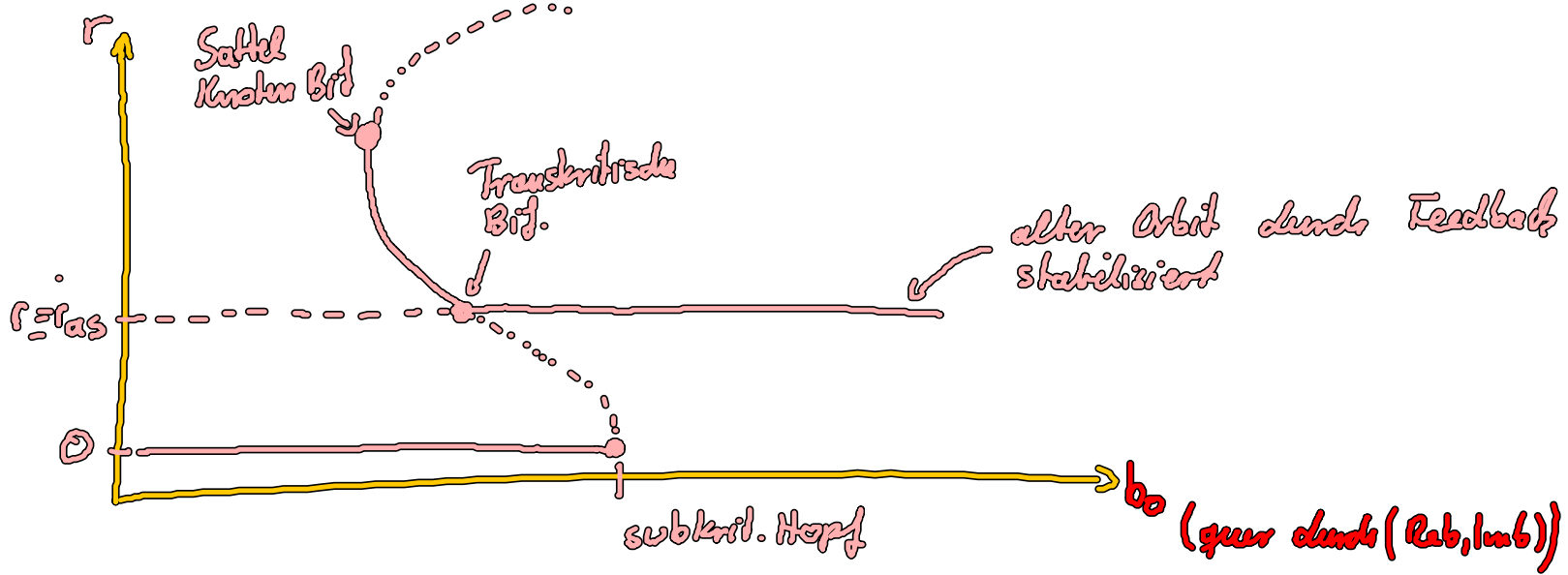


Figure 5. Oriented Hopf curves  $b = b_+(\omega)$  (solid) and  $b = b_-(\omega)$  (dashed) for  $\omega \in \mathbb{R}$  in control system (3.2), linearized at  $z_1 \equiv z_2 \equiv 0$ . Orientation arrows indicate increasing  $\omega$ . Note the symmetry with respect to the real axis, owing to complex conjugation  $b_{\pm}(-\omega) = \overline{b_{\pm}(\omega)}$ . Unstable dimensions are indicated by  $E(b)$ . Note  $E(b) = 0$  inside the shaded loop  $\Lambda_a$ .  $a = 0.1$ .



$$\lambda = 2\alpha - 0.01$$





- $r_{as}$  tatsächlich stabilisiert (im straffierten Bereich)
- neue Delay induzierte Orbits in der Dynamik entstehen durch Sattel-Knoten Bifurkation

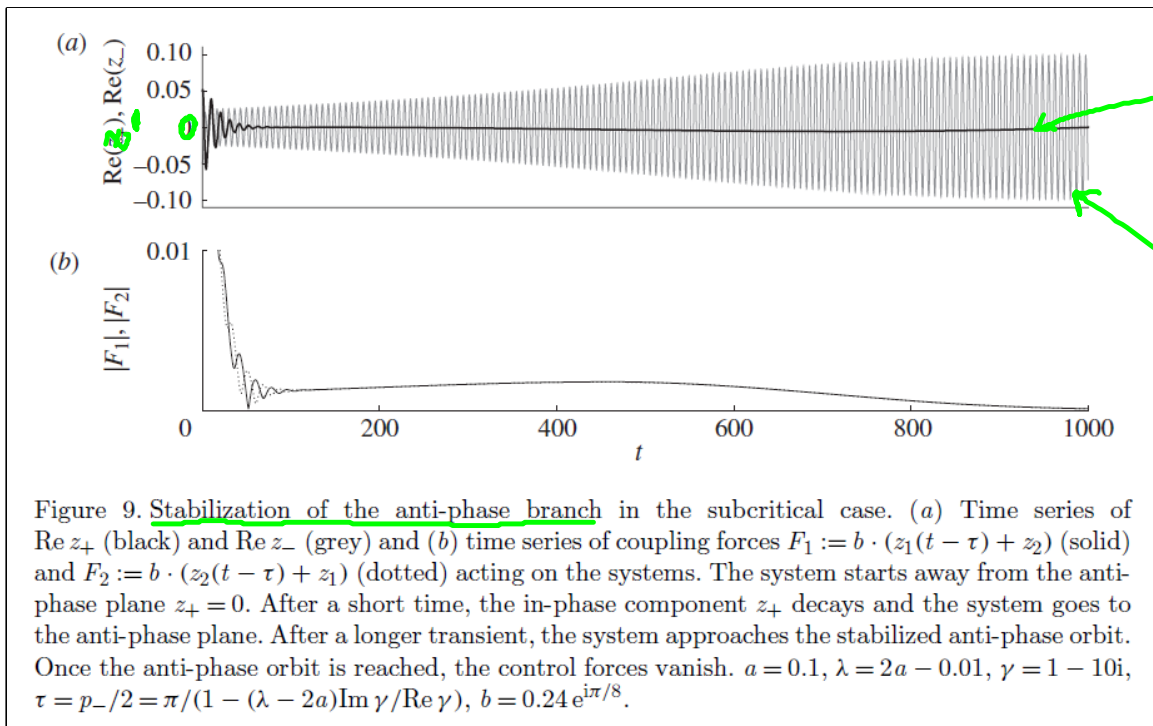


Figure 9. Stabilization of the anti-phase branch in the subcritical case. (a) Time series of  $\text{Re } z_+$  (black) and  $\text{Re } z_-$  (grey) and (b) time series of coupling forces  $F_1 := b \cdot (z_1(t - \tau) + z_2)$  (solid) and  $F_2 := b \cdot (z_2(t - \tau) + z_1)$  (dotted) acting on the systems. The system starts away from the anti-phase plane  $z_+ = 0$ . After a short time, the in-phase component  $z_+$  decays and the system goes to the anti-phase plane. After a longer transient, the system approaches the stabilized anti-phase orbit. Once the anti-phase orbit is reached, the control forces vanish.  $a = 0.1$ ,  $\lambda = 2a - 0.01$ ,  $\gamma = 1 - 10i$ ,  $\tau = p_-/2 = \pi/(1 - (\lambda - 2a)\text{Im } \gamma/\text{Re } \gamma)$ ,  $b = 0.24 e^{i\pi/8}$ .

## 4.4. Netzwerke

- Erweiterung der 2 gekoppelte Oszillatoren auf beliebig viele und beliebig gekoppelte Osz.

Kopplung: Link (Verbindung) im Netzwerk

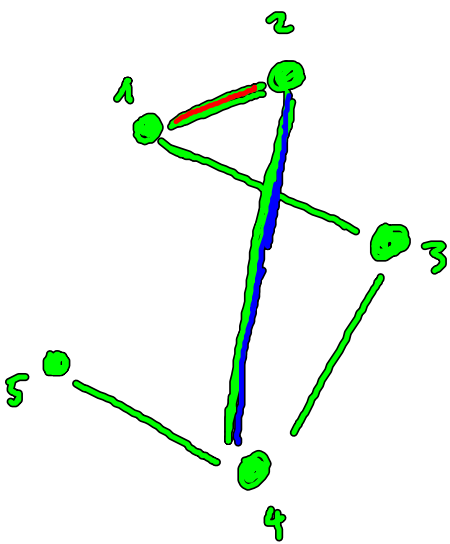
Elemente: Knoten (Node) im Netzwerk  
z.B. Laser, Neuronen

- Wichtige Infos zur Beschreibung

1) Topologie (welcher Knoten ist mit wem gekoppelt)

2) Kopplungsschema (wie wirkt die Kopplung  
z.B. diffusiv wie in 4.2.)

#### 4.4.1. Topologie des Netzwerkes



$N$  Knoten

$N \times N$  Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A$ : Nachbarschaftsmatrix  
= Adjacency-Matrix

- A :  $a_{ij} = 1$  wenn Koppelung existiert sonst 0

Erweiterung von A

- gerichtete Verbindungen  $\rightarrow$  A nicht mehr symm.
- gewichtete Verbindungen  $\rightarrow$   $a_{ij}$  Werte zwischen 0 und 1 annehmen

- Charakterisierung der Topologie durch Kenngrößen

z.B. • Knotenordnung  
(Zahl angekoppelter Elemente)

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

- Verteilung von  $k$  :  $P(k)$  Wahrscheinlichkeit einen Knoten der Ordnung  $k$  zu finden

- mittlere Knotenordnung  $\langle k \rangle = \sum_i P(k_i) k_i$

• es existieren viele weitere mögliche Größen um Netzwerk Topologien zu unterscheiden

- mittlere Pfadlänge
- Clusterkoeffizient
- Einbettung

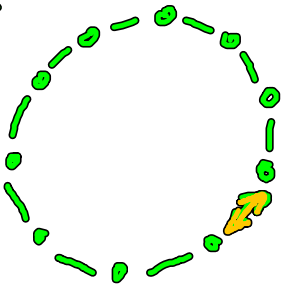
Literatur

Newman „Networks: An Introduction“

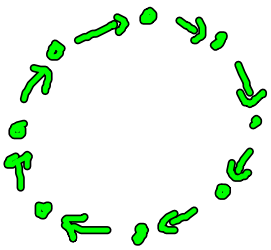
- Eigenwertspektrum von  $\underline{A}$  auch gut um Topologie zu beschreiben (enthält vollständige Information)

z.B.

Netz,  $N=8$

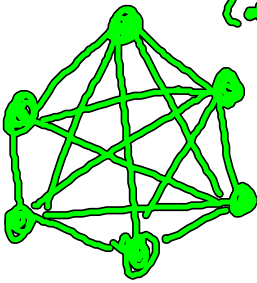


bidirektionaler Ring

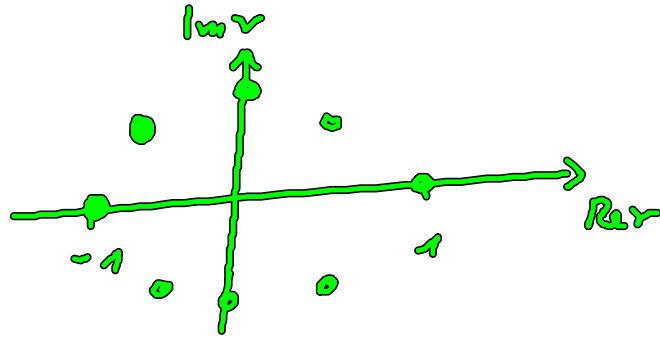
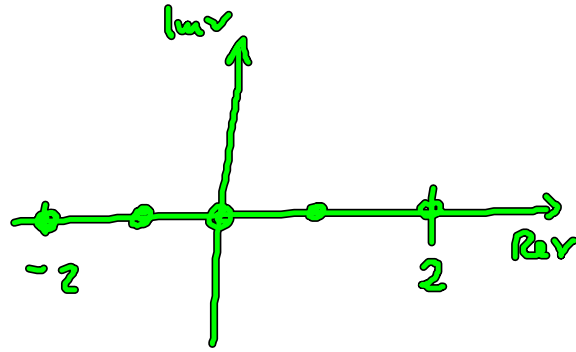


unidirektionaler Ring

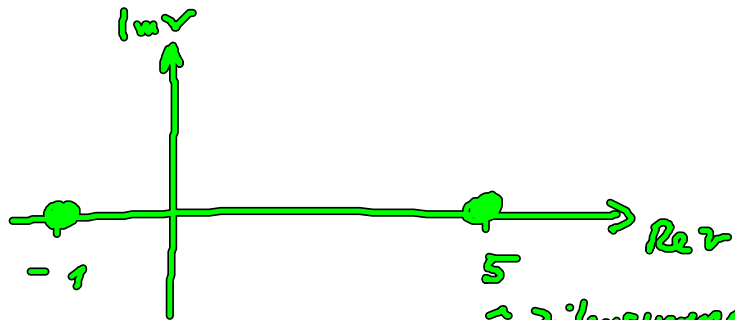
vollständiges Netz (all-to-all)



EW  $\lambda$



$$\lambda_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$



$\hat{=}$  Zeilensumme von  $\underline{A}$