

Summary → Network dynamics

• Stability of synchronized solutions can be determined by Master - Stability - Function (MSF)

• MSF results from linear stability analysis along the eigenvectors of adjacency matrix A (coupling matrix G)

Lyapunov Exp.
↓
⇒ $\Lambda(v)$

⇒ Topology and local dynamics can be separated

↑
Eigenvalue spectra v_k
of G

↑
coupling scheme H

$$\triangleright \delta \tilde{x}_k = DF|_{x_i(t)} \delta \tilde{x}_k(t) + \sigma v_k H \delta \tilde{x}_k(t - \tau)$$

5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: deterministische dynam. Systeme

jetzt: stochastische dynam. Systeme (z.B. Rauschen durch spontane Emission im Laser)

5.1. Rauschinduzierte Oszillationen und Kohärenzverlust

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvariable $X(t)$

(\leftrightarrow) im thermodyn. Gleichgewicht zeitunabhängige

Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Jaynes'sches Prinzip der vorurteilsfreien Schätzung

geg.: unabhängige kanonische

Verteilung
$$p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_i M_i^v}$$

M_i^v : Zufallsvariablen

Vertundwahrscheinlichkeit zeitabhängig

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$$

Realisierungen x_1, x_2, x_3, \dots von $X(t)$

Markoff - Prozesse

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2, x_3, t_3, \dots) := \frac{p(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots)}{p(x_2, t_2, \dots)}$$

\nearrow

bedingte
Wahrscheinl.

$$\stackrel{!}{=} p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

"hängt nur von der jüngsten Bedingung ab"

$$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \dots$$

kein Gedächtnis!

Langevin - Gleichung -

fluktuierende stochastische Kraft $f(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\eta \dot{x} + f(t)$$

 ↑ ↑
Reibung Rauschen

Gauß'sches weißes Rauschen

$$\langle f(t) \rangle = 0$$

$\langle \dots \rangle =$ statistische Mittelung

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t - t') \quad \text{unkorreliert}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorreliert Zufallsvariablen gehorchen einer Gaußverteilung

Autokorrelationsfunktion

$$\mathcal{F}(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle) (x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergood. Systeme: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\mathcal{F}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t) x(t+s) \quad (\text{wenn } \langle x \rangle = 0)$$

• Fourier - Transform : $\hat{x}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t) \quad \text{in } t \in [-T, T]$

- Spektrale Leistungsdichte (power spectral density):

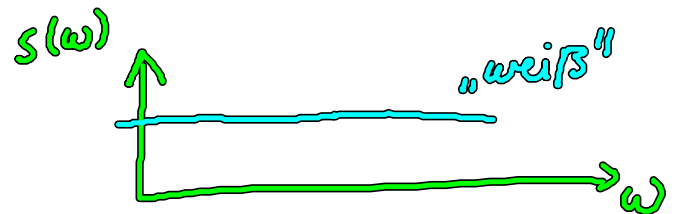
$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega, T)|^2$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t) x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

Wiener - Khinchin - Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Bsp

System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.

Van der Pol - Oszillator

(1926
el. Stromkreis)

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = Df$$

D Rauschintensität
 $f(t)$ Gauß. weißer Rausch

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + Df(t) \end{aligned}$$

$D=0$: Fixpunkte: $x=y=0$,

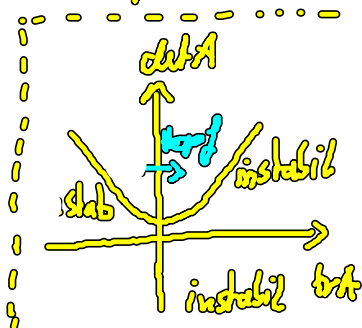
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$\epsilon = 0$ Hopf Bifurkation

$\epsilon < 0$ stab. Fokus

$\epsilon > 0$ instab. Fokus + LC

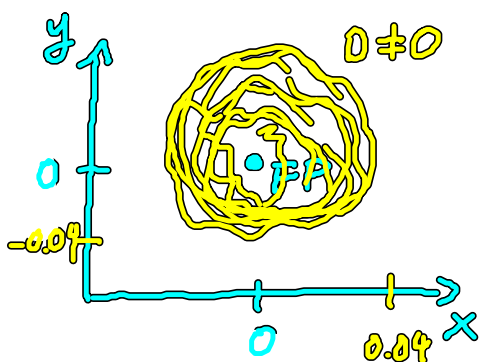
$$\begin{aligned} \text{tr} A &= \epsilon \\ \det A &= \omega_0^2 \end{aligned}$$



wähle $\epsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$

\Rightarrow keine deterministische Oszillationen

aber mit $D \neq 0$ existieren rauschinduzierte Osz.

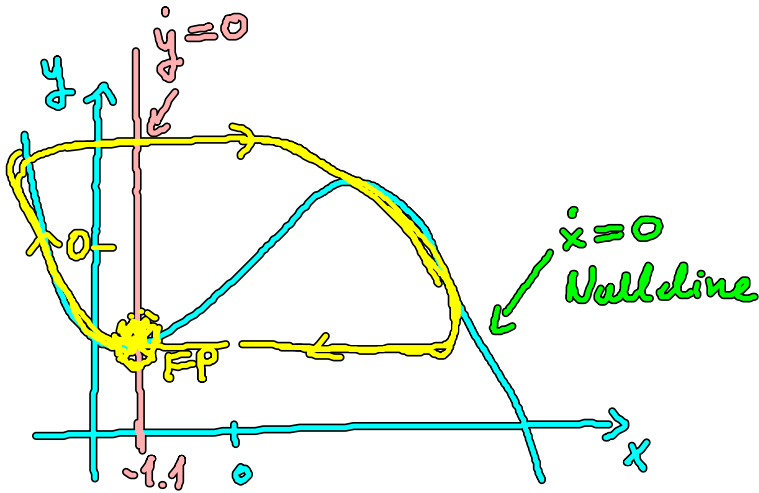


2. Bsp : anregbares System
FitzHugh - Nagumo - Modell (Neuron)

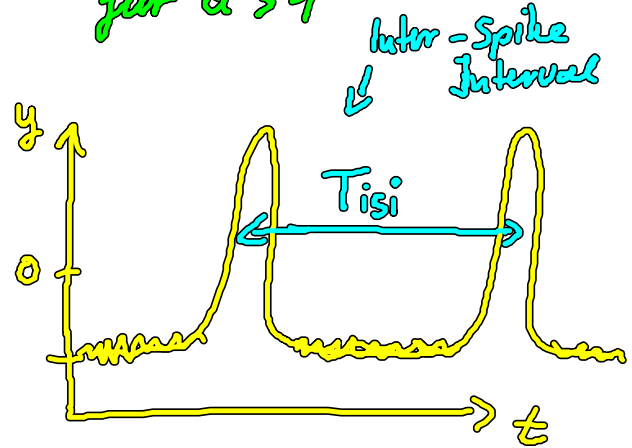
$$\begin{aligned} \epsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + Df(t) \end{aligned}$$

zeitkalerparameter $\epsilon \ll 1$
 ($\epsilon = 0.01$)
 Anregungsschwelle a ($a = 1$)

$D=0$: Fixpunkt: $x = -a$
 $y = -a + \frac{a^3}{3}$



• stabiler Knoten
 für $a > 1$



$D \neq 0$ rauschinduzierte
 Oszillationen
 (spiking von
 Neuronen)

Kohärenzresonanz

(Pikovsky, Kurths: PRL 78, 275 (1997))

• konstruktiver Einfluss von Rauschen

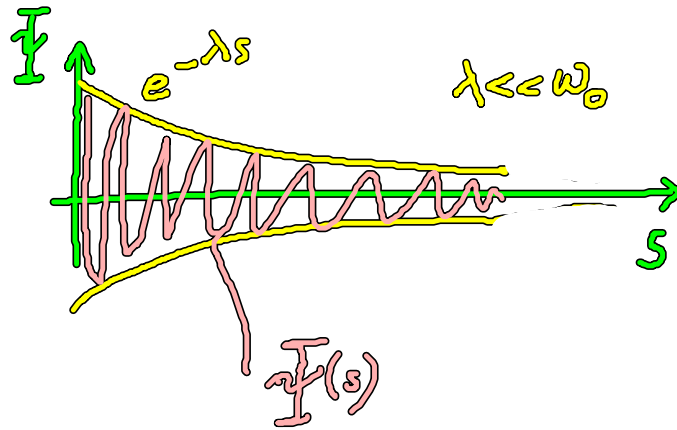
• Regularität („Kohärenz“) der rauschinduzierten Osz. am
 größten für endliche Rauschstärke D_{opt}

• Maß für Regularität

Korrelationszeit $t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$

(für lin. stochastischer Prozess

$$\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi \Rightarrow \bar{\Psi}(s) = \Psi(0) e^{-\lambda s} \cos \omega_0 s$$



$$t_{\text{cor}} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

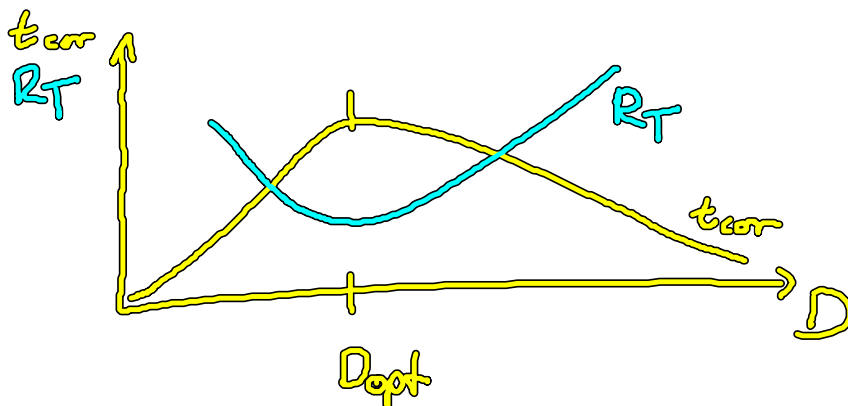
Approx.: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$ Füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_{\text{cor}}}} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \underline{\underline{\frac{2}{\pi \lambda}}}$$

$$\Rightarrow \bar{\Psi}(s) = \Psi(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{\text{cor}}}} \cos \omega_0 s$$

Exponentiell abklingende
Funktion)

Im Fall von Kohärenzresonanz



R_T : Breite der Verteilung der T_{isi}

$$R_T = \frac{\sqrt{\langle T_{isi}^2 \rangle - \langle T_{isi} \rangle^2}}{\langle T_{isi} \rangle}$$

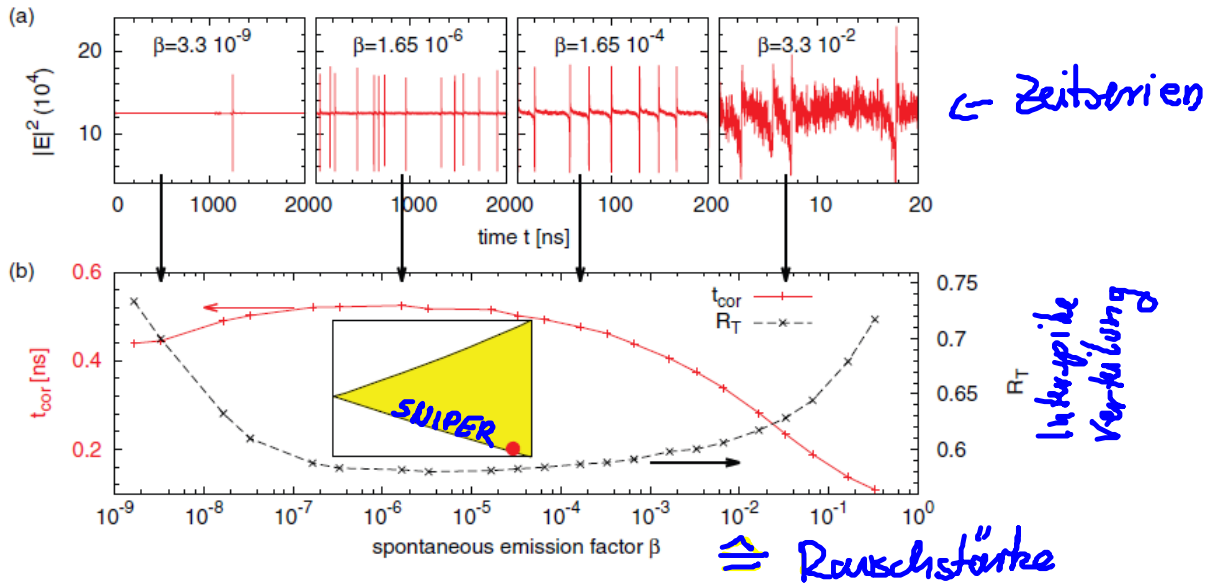


Fig. 4: (Colour on-line) Coherence resonance: (a) time series of the intensity $|E|^2$ of noise-induced spiking for various values of β inside the locking regime. (b) t_{cor} (red crosses) and R_T (black squares) vs. noise intensity β . Parameters: $\Delta\nu_{inj} = -1.630295$ GHz and $K = 0.2$ (marked by the red dot in the inset of the parameter plane). Parameters as in table 1.

Optical injection enables coherence resonance in quantum-dot lasers

D. ZIEMANN, R. AUST, B. LINGNAU, E. SCHÖLL and K. LÜDGE^(a)

Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Berlin - D-10623 Berlin, Germany, EU