Summary:

- Reduction of laser rate equations

① close to laser threshold

$\Rightarrow$ amplitude equations $\quad \dot{E} = \frac{1}{2} E \left((p-1) - E^2 \right)$

- only valid if $|p-1| \ll \gamma$ $\quad \gamma = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$

② rescaling for $\gamma \ll 1$ $\quad \boxed{\text{Class B}}$

$I = (p-1)(1+y)$

$D = 1 + \omega_R x$

$s = \omega_R t$

new time

Intensity

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{y} &= (1+y)x \\ \dot{x} &= -y - \varepsilon^2 x (p - (p-1)) \end{aligned}}$$

Inversion

$\omega_R = \frac{1}{\gamma (p-1)}$

$\varepsilon^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{p-1}}$

$\hat{=}$ equivalent to class B equations

6.3.2. Ungestörtes Problem (Class B laser $\gamma = 0$)

$\dot{x} = -y$

$\dot{y} = (1+y)x$

System ist konservativ

$$\boxed{C = \frac{x^2}{2} + y - \ln(1+y)}$$

(Bed.: $F(x) = \dot{x}$ ist konservativ

$\underline{F} \nabla_x C = 0$)

$$\nabla C = \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{1+y} \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} -y \\ (1+y)x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -xy + \left(1 - \frac{1}{1+y}\right)(1+y)x$$

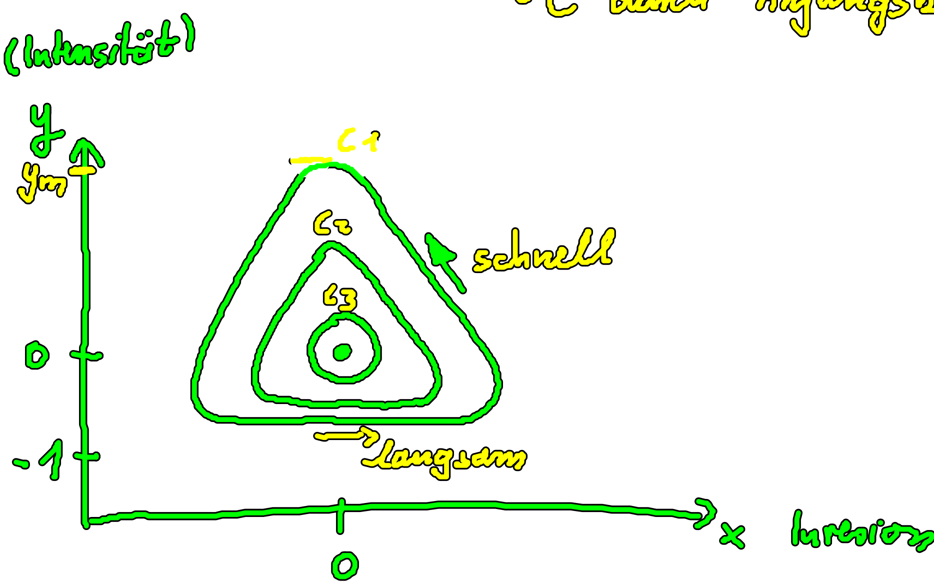
$$= -xy + x(1+y) - x$$

$$= 0$$

$$x(y) = \pm\sqrt{2(C - y + \ln(1+y))}$$

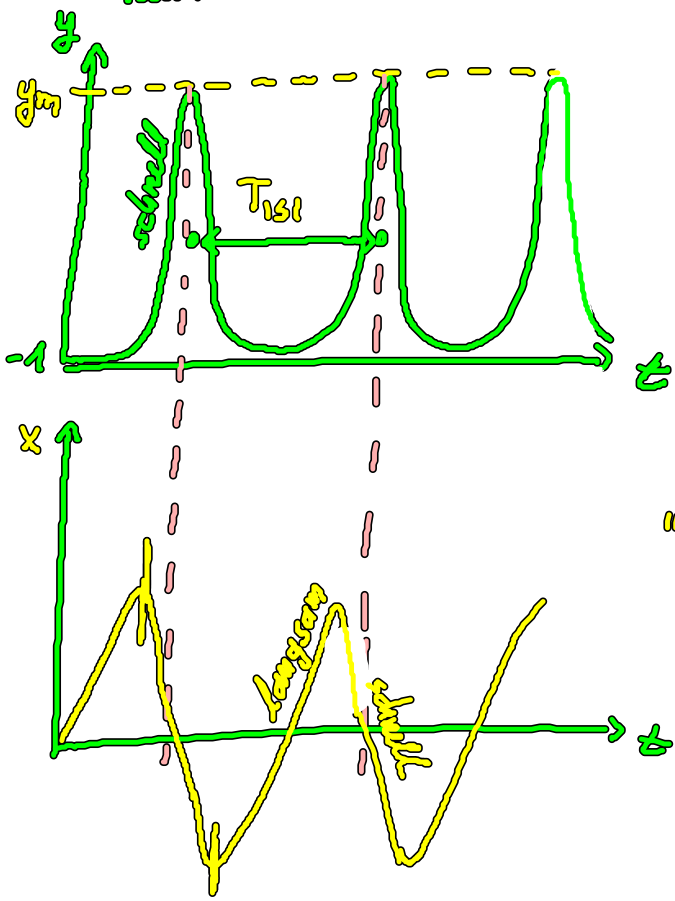
d.h. zu jedem C gibt es eine Trajektorie $x(y)$ im Phasenraum

- C durch Anfangsbedingungen gegeben



$y=-1 \Rightarrow I=0$

numerisch:



„schiefer Sägezahn"

- Zeitabhängigkeit noch unklar
- Lösungen sind nichtlineare Schwingungen

- Interspike Intervall T_{isi} ≈ Zeit während $y=-1$

DGL: $\dot{x} = 1$ für $y=-1$

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} dx = \int_{t}^{t+T_{isi}} ds$$

$$2\sqrt{2C} = T_{isi}$$

- Periode der Pulse hängt von C also von AB ab

- Maximale Intensität von y

  y_m erreicht wenn $x=0$

  $\Rightarrow y_m = C$

$\Rightarrow$ Periode und Intensität sind korreliert

$$y_m = \frac{T_{isi}^2}{8}$$

kann man messen!

[aber: im Laser verschwindet Dämpfung nicht]

Zeitentwicklung $\rightarrow$

$$\dot{y} = (1+y)x \qquad \dot{x} = -y \quad \Rightarrow \quad 0 = \ddot{x} + x - \dot{x}x$$

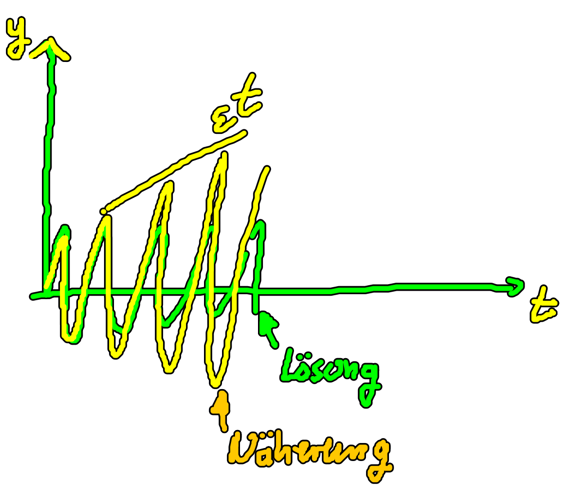
Oszillator mit nichtlinearer Reibung

Ansatz wieder über Potenzreihe

Problem: $\boxed{\text{Bsp.}}$ $\cos((1+\varepsilon)t) = \cos t - \underline{\varepsilon t \sin t} + O(\varepsilon^2)$

$\uparrow$ variable Periode

ist nur "gut" für $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$



d.h. periodische Lösung schwierig mit Potenzreihenansatz

Lösung: • Poincaré – Lindstedt Methode

• Einführen einer gestreckten Zeit $\tau = \omega(\varepsilon)t$

$\rightarrow$ Periode der Lösungen in τ ist nicht ε abhängig

(Periode in t ist weiter ε abhängig)

$\rightarrow$ $y = y(\tau, \varepsilon)$

$$\tau = (1+\alpha A^2)s$$

A: Amplitude

α: noch zu bestimmen

$$x(\tau) = A x_0(\tau) + A^2 x_1(\tau) + O(A^3)$$

$$y(\tau) = A y_0(\tau) + A^2 y_1(\tau) + O(A^3)$$

- für $A^2 \to 0$ ist Lösung harmonische Schwingung

- Einsetzen in DGL

$\dot{y} = (1+y)x$

$\dot{x} = -y$

$$\frac{\partial}{\partial s} = (1+\alpha A^2)\frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$(1+\alpha A^2)(A\dot{y}_0 + A^2\dot{y}_1) = [1+(Ay_0 + A^2 y_1)](Ax_0 + A^2 x_1)$$

$$(1+\alpha A^2)(A\dot{x}_0 + A^2\dot{x}_1) = -(Ay_0 + A^2 y_1)$$

- Sortieren nach Ordnungen von A

$$A(x_0 - \dot{y}_0) + A^2(x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1) + O(A^3) = 0$$

$$\underbrace{A(\dot{x}_0 + y_0)}_{O(A)} + \underbrace{A^2(\dot{x}_1 + y_1)}_{O(A^2)} + O(A^3) = 0$$

$O(A)$:
$$y_0 = e^{i\tau} + c.c.$$
$$x_0 = ie^{i\tau} + c.c.$$

$O(A^2)$: $x_0 y_0 + x_1 - \dot{y}_1 = 0$ $\quad \Leftrightarrow \quad -ie^{2i\tau} = \ddot{x}_1 + x_1$

$\dot{x}_1 + y_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{3} i e^{2i\tau} + cc$$

$$y_1 = -\frac{2}{3} e^{i2\tau} + cc$$

noch keine Bedingung für α

$O(A^3)$: $\dot{y}_2 + \alpha \dot{y}_0 = (y_1 x_0 + x_1 y_0) + y_2$

$\dot{x}_2 + \alpha \dot{x}_0 = -y_2$

$\Rightarrow$ mit bekannten x_1, x_0

$$\boxed{\ddot{x}_2 + x_2 = 2i\alpha e^{i\tau} + \frac{1}{3} i e^{3i\tau}}$$

Bedingung an die Lösung: Lösung muss periodisch sein!

<u>Einschub</u>:

<u>Satz</u>: Wenn $f: T \to \mathbb{R}$ eine glatte periodische Funktion ist, wobei T die Periode ist und die DGL $\ddot{y} + y = f$ gegeben ist, <u>dann</u> gibt es eine periodische Lösung falls

$$\int f(t) \cos t \, dt = 0 \quad , \quad \int f(t) \sin t \, dt = 0$$

<u>Beweis</u>: Sei das innere Produkt $\langle y, z \rangle = \int y(t) z(t) \, dt$

und DGL $Ay = f$ mit $A = \frac{d^2}{dt^2} + 1$ T

$$\underline{\langle y, Az \rangle} = \int y(z'' + z)\,dt$$ 2x partiell integrieren

$$= \int (y'' + y)\, z\, dt$$

$$= \underline{\langle Ay, z \rangle}$$

$\Rightarrow$ A ist selbstadjungiert

wenn $Ay = f$ und $\boxed{Az = 0}$ $\hat{=}$ z ist Lösung der homogenen DGL $\hat{=}$ $\sin t$, $\cos t$

$$\langle f, z \rangle = \langle Ay, z \rangle = \langle y, Az \rangle = 0$$ $\boxtimes$

Anwendung der Lösbarkeitsbedingung auf $O(A^3)$

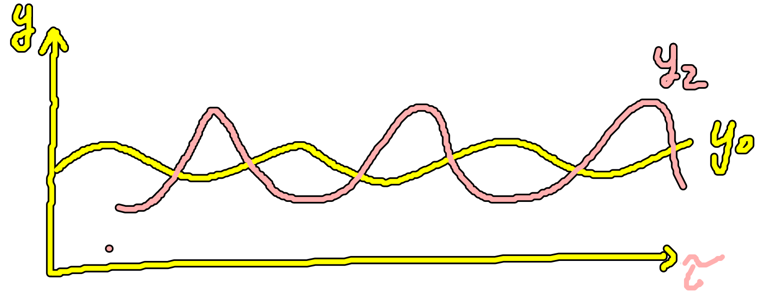
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = -\frac{1}{6}}}$$

Lösung der DGL bis $O(A^3)$:

$$\tau = \left(1 - \frac{1}{6}A^2\right)s$$

$$x(\tau) = \underline{iAe^{i\tau}} + \frac{1}{3}A^2 \underline{e^{2i\tau}} + cc + O(A^3)$$

$$y(\tau) = Ae^{i\tau} - A^2\frac{2}{3}e^{2i\tau} + cc + O(A^3)$$



- je nach Zahl Ordnungen werden die Schwingungen anharmonischer
- Lösung gültig für alle τ

- Class B Laser: $\gamma = 0$ $\Rightarrow$ - anharmonische Schwingungen
  - Erhaltungsgröße C

  $\gamma \neq 0$ $\Rightarrow$ mit $\gamma \neq 0$ müssen die nächsten Ordnungen in $\sqrt{\gamma}$ mitgenommen werden