


3.3 Massebilanz

- Kontinuum:
 

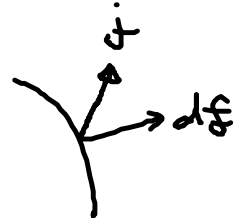
- Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \rho(x, t) d^3x$$

ρ ← Massendichte

- Massenhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) d^3x = - \int_V \underbrace{j(x, t) \cdot df}_{\substack{\text{Masse, die durch} \\ \text{die Oberfläche raus-} \\ \text{fließt pro Zeiteinheit} \\ \text{(s.u.)}}} \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_V \text{div } j d^3x$$

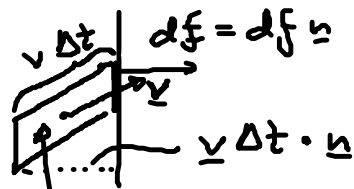


V beliebig \rightarrow $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0$ (3.15a)

... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz für Masse

mit $j = \rho v$... Massendichte
= Dichte Erhaltungsgröße * Geschw. (3.15b)

„Beweis“:



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho \Delta V = \rho v \Delta t \cdot df \rightarrow \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \underbrace{\rho v}_{j} \cdot df$$

• (3.15a) ... gültig für alle Erhaltungsgrößen

(3.15b) ... „konvektiver“ Anteil von j

• in kompressiblen Flüssigkeiten: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (3.17)

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v)}_{=0 \text{ (3.15)}} - \rho \nabla \cdot v \rightarrow \boxed{\text{div } v = 0} \text{ (3.16)}$$

• Hilfsformel:

Geg:

$$\text{physikal. Größe} = \int_S \phi d^3x = \int \phi \frac{dm}{\text{Masse}} \text{element}$$

Felder:

$\rho \phi$... Volumendichte = Größe pro Volumeneinheit

ϕ ... spezifische Größe = " " Masseneinheit

$$\text{dann gilt: } \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi v) \stackrel{!}{=} \rho \frac{d\phi}{dt} \text{ (3.17)}$$

$$\text{Beweis: } \underbrace{\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}} + \underbrace{\phi \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\rho v \cdot \nabla \phi} + \underbrace{\phi \text{div}(\rho v)} = 0 \text{ (3.15)}$$

Bsp: (i) Massendichte: $\phi = 1$

(ii) Thermodynam. Potentiale:
spezifische innere Energie u
" Entropie s

(iii) Impulsdichte: $\rho v \rightarrow \phi = v_i$ (s. Kap. 3.4)

3.4. Impulsbilanz

• Gesamtimpuls:
$$\underline{P}(t) = \int_V \underbrace{\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)}_{\text{Impulsdichte}} d^3x$$

Geschw. von Vol. el. d^3x

• Newton (2. Axiom)

$$\frac{d\underline{P}}{dt} = \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d^3x = - \underbrace{\int \underline{j}^{(P)} d^3x}_{\text{Impulsstrom (konvektiver Anteil)}} + \underbrace{\int \rho \underline{b} d^3x}_{\text{Volumenkraft}} + \underbrace{\int \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}, t) d^3x}_{\frac{\partial V}{\partial t} \text{Oberflächenkräfte}}$$

a) Impulsstromdichte: (konvektiver Anteil)

• $\underline{j}^{(P)}$... Tensor 2. Stufe! [Strom für Vektor \underline{g}]

(3.15b)
$$\underline{j}^{(P)}_{ij} = \rho v_i v_j \quad (3.19a)$$

Impuls \times Geschw. dichte

$$\underline{j}^{(P)} = \rho \underline{v} \otimes \underline{v}$$

b) Volumenkraft

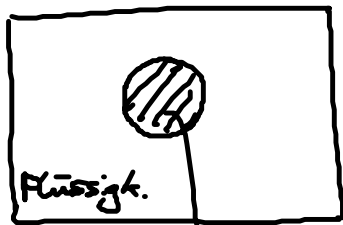
- $\rho \underline{b}$... Volumenkraftdichte
- \underline{b} ... Massenkraftdichte

• Bsp: externe Felder: Gravitation: $\underline{b} = \underline{g}$
 [greife lokal an d^3x an!] elektr./magnet. Felder

c) Oberflächenkräfte, Spannungstensor

• Ursprung: kurzreichweitige Kräfte:

Bsp:



gefüllter Tropfen

- Druckkräfte
- Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten

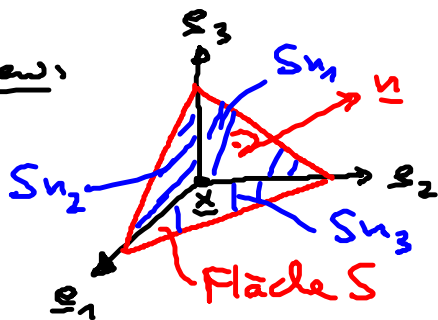
• Bel:

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{I}}(\underline{x}) \underline{n} \quad (3.196)$$

$$t_i = T_{ij} n_j$$

$\underline{\underline{I}}$... Spannungstensor

Bew:



irregulärer Tetraeder

Volumen: $\frac{1}{3} h S$
 Höhe \uparrow Grundfläche \uparrow

Impulsbilanz für $S, h \rightarrow 0$ [mit $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v}) + \text{div} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{g}}$]

$$S \left[\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) + \left(\sum_{i=1}^3 \right) n_i \underline{t}(\underline{x}, -\underline{e}_i) \right] + \frac{1}{3} h S \rho \left[\underline{g} - \frac{d\underline{v}}{dt} \right] = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\dots) \rightarrow \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = - \underline{t}(\underline{x}, -\underline{e}_i) n_i$$

$$\begin{matrix} \text{achse} \\ \text{reichte} \end{matrix} \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) n_i$$

bzw in Komp.
 $i \rightarrow j$

$$t_i(\underline{x}, \underline{n}) = \underbrace{T_{ij}}_{\text{ged}} n_j$$

• damit $\int \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) dF = \int \underline{\underline{I}} dF = \int \text{div} \underline{\underline{I}} d^3x \quad (3.20)$

$$\left[\int t_i dF = \int T_{ij} dF_j = \int \nabla_j T_{ij} d^3x \right]$$

- Verdichtlidg:

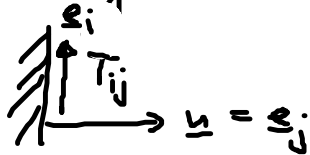
$$T_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{T} \underline{e}_j$$

... i-te Komponente des Spangvektors $\underline{t} = \underline{T} \underline{v}$
für Normale $\underline{v} = \underline{e}_j$

(1) Normalspannung: $i=j$

Diagonalelemente: Spangkräfte $\parallel \underline{v} = \underline{e}_j$

(2) Schubspannung: $i \neq j$



Nicht diagonalelemente: Spangkräfte $\perp \underline{v} = \underline{e}_j$

(3) \underline{T} symmetrisch (s.u.) \rightarrow Diagonalisierung

$$\underline{T} \underline{v}^{(i)} = \lambda^{(i)} \underline{v}^{(i)}$$

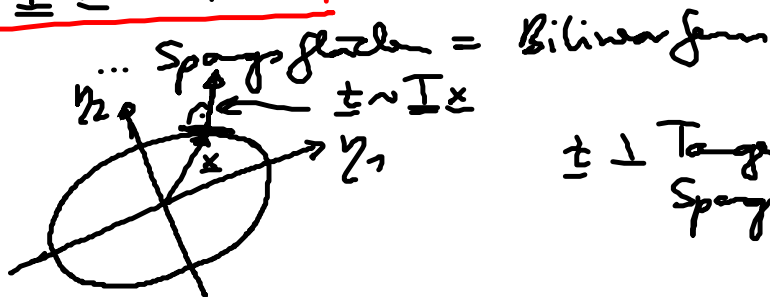
Hauptspannungsrichtungen

Hauptspannungen $\parallel \underline{v}^{(i)}$

im EU-System: $\underline{T} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & & 0 \\ & \lambda^{(2)} & \\ 0 & & \lambda^{(3)} \end{pmatrix} \Rightarrow$ keine Schubspannen $\perp \underline{v}^{(i)}$

- Poinsotsche Konstruktion:

$$\underline{x} \cdot \underline{T} \underline{x} = \text{konst.}$$



$\underline{t} \perp$ Tangentialebene an Spangfläche

d) Impulsbilanz:

- Newton (3.19), $\int \underline{t}^{(\rho)} d\underline{f} = \int \underbrace{\text{div} \underline{t}^{(\rho)}}_{\text{SVOV}} d^3x$ (3.20) & V beliebig

kanonische Form.

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v - \underline{I}) = \rho b} \quad (3.21)$$

Impulsstrom- Quellterm
dichte

NB: Kontinuitätsgleichung für ρv & Quelle

• Umschreibung:

$$\text{mit } \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)}_{\phi \text{ in (3.17)}} + \underbrace{\nabla_j(\rho v_i v_j)}_{(3.17)} = \underbrace{[\dots]}_{\phi} = \rho \frac{d}{dt} v_i$$

folgt aus (3.21)

$$\boxed{\rho \frac{dv}{dt} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = \operatorname{div} \underline{I} + \rho b} \quad (3.22)$$