



keine Zeitumkehrinvarianz  $\Leftrightarrow$  Irreversibilität  
 $\equiv$  Dissipation

$\rightarrow$  dissipative Ströme verhalten sich unter  
Zeitumkehr wie die dazugehörigen  
Erhaltungsgrößen

Bsp:  $I' \leftrightarrow g v$

c) Anwendung auf Newtonsche Flüssigkeit:

• Zeitumkehr:

$$\begin{aligned} g v &\rightarrow -g v \implies I' \rightarrow -I' & f = t &\rightarrow -t \\ g e &\rightarrow g e \implies q \rightarrow q & & \text{" "} \end{aligned}$$

wegen:  $\left. \begin{aligned} \underline{A} &\rightarrow -\underline{A} \\ \underline{\nabla T} &\rightarrow \underline{\nabla T} \end{aligned} \right\} f = t \rightarrow -t$

folgt aus (3.45): 
$$\begin{aligned} T'_{ij} &= \gamma_{ijkl} A_{kl} \\ q_i &= -\kappa_{ij} \nabla_j T \end{aligned}$$

NB: Tensoren in  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\kappa}$  gestreckt!

(i) Wärmeleitfähigkeitstensor  $\underline{\kappa}$ :

Symmetrieforderung:  $\kappa_{ij} = \kappa_{kl} R_{ki} R_{lj}$ ,  $\underline{R} \in SO(3)$

$\rightarrow$  
$$\begin{aligned} \underline{\kappa} &= \kappa \underline{1} \\ \underline{q} &= -\kappa \underline{\nabla T} \end{aligned}$$
 (3.50)

$\kappa$ ... Wärmeleitfähigkeit

NB:  $\kappa \geq 0$  (3.51) wegen  $G = -\frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \underline{\nabla T} = \frac{\kappa}{T^2} (\underline{\nabla T})^2 \geq 0$

[... „Wärme fließt von hoher zu niedriger Temperatur“]

(ii) Zähigkeitstensor  $\eta_{ijkl}$ : (4. Stufe) [SI-Komp]

(1) Permutationssymmetrien:

$$\begin{cases} \eta_{ijkl} = \eta_{jikl} = \eta_{ijlk} \\ \eta_{ijkl} = \eta_{klij} \end{cases} \quad \text{wegen } T'_{ij} = T'_{ji} \text{ \& } A_{kl} = A_{lk}$$

wegen Dissipationsfunktion:  $w = \frac{1}{2} \text{Sp } \underline{\underline{I}}' \underline{\underline{A}}$   
 $= \frac{1}{2} \eta_{ijkl} A_{ij} A_{kl}$

$2w$  ... pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Reibungswärme

$$\underline{\underline{I}}' = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{A}}} \quad (3.54)$$

(2) Rotationsymmetrie:

$$\eta_{ijkl} = \eta_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l} \quad (3.55)$$

$\underline{\underline{R}} \in \text{SO}(3)$

(1) & (2)  $\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\eta_{ijkl} = \eta' \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.56)$$

$$\underline{\underline{I}}' = 2\eta \underline{\underline{A}} + \eta' \underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}}$$

...  $\underline{\underline{I}}'$  für Newtonsche Flüssigkeit  
 [(3.56) definiert Newt. Fl.]

- Umschreibung:

$$\underline{\underline{I}}' = 2\eta \underbrace{(\underline{\underline{A}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}})}_{\text{Scherng!}} + (\eta' + \frac{2}{3}\eta) \underbrace{\underline{\underline{1}} \text{Sp} \underline{\underline{A}}}_{\text{Kompression}} \quad (3.57)$$

$\eta$  ... Scherviskosität       $\eta' + \frac{2}{3}\eta$  ... Volumenviskosität

Wähle: reine Scherung ( $\text{Sp} \underline{A} = 0$ ) } und  $\text{TG} = \text{Sp} \underline{I}' \underline{A} \geq 0$   
 reine Kompression ( $\underline{A} \sim \underline{1}$ ) }

$$\rightarrow \boxed{\eta \geq 0, \quad \eta' + \frac{2}{3}\eta \geq 0} \quad (3.58)$$

$$[\text{Beweis: } \text{TG} = 2\eta \text{Sp} \left[ \underline{A} - \frac{1}{3} \underline{1} \text{Sp} \underline{A} \right]^2 + \left( \eta' + \frac{2}{3}\eta \right) (\text{Sp} \underline{A})^2 \geq 0]$$

### 3.9 Newtonsche Flüssigkeit: Zusammenstellung der Gleichungen

s. Folie

### 3.10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

• NS-Gleichungen

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \underline{v} + (\eta + \eta') \nabla (\text{div} \underline{v}) + \rho \underline{b} \quad (3.62)$$

NB: mit Massenbilanz & Materialgesetz  $\rho(\rho)$ : ( $T = \text{konstant}$ )

4 Gleichungen für  $\underline{v}, p$

• Verhalten unter Zeitumkehr:

$$\left. \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \underline{v} \rightarrow -\underline{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta \nabla^2 \underline{v} \rightarrow -\eta \nabla^2 \underline{v}$$

bricht Zeitumkehrinvarianz

also: „Dissipation“ von Energie  $\leftrightarrow$  Irreversibilität

• Nichtlinearität:  $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \rightarrow$  Turbulenz

• ideale Flüssigkeit:  $\eta, \eta' = 0 \rightarrow$  Eulergleichungen  
 Anwendung: Dynamik von Gasen

• Flüssigkeiten:  $\text{div} \underline{v} \approx 0$  (in guter Näherung inkompressibel)

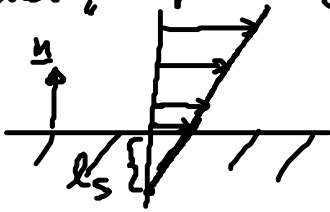
• Randbedingungen:

(i) haftend:

$$\underline{v}|_{\text{Rand}} = 0 \quad (3.63)$$

„glatte“, „homogene“ Oberfläche

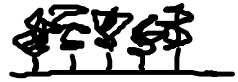
(ii) mit „Slip“-länge  $l_s$ :



$$\begin{aligned} \text{Normalgeschw.: } v_n &= 0 \\ \text{Tangentialgeschw.: } \left( v_t - \frac{l_s n \cdot \nabla v_t}{\text{Rand}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

Realisierung: strukturierte Oberflächen (auf Nanometerskala)

- mit Polymeren beschichtet



Nadeln



[Choi, Kim PRL 96, 06601 (2006)  
Silikonadeln auf Silikonfläche]

- demisch strukturiert → Muster



hydro-  
phob hydro-  
phil

- Rauigkeit

→  $l_s = \dots 100\text{nm} \dots 50\mu\text{m}$

wichtig für: Mikro-/Nanofluidik  
Biologie  
poröse Medien