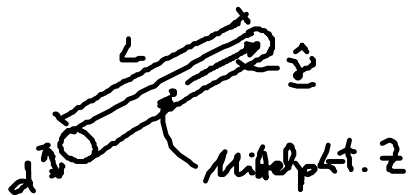


4.6 Hydrodynamische Reibung von Teilchen

$$\begin{pmatrix} \underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\gamma} & \underline{C} \\ \underline{C}^t & \underline{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{u} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

b) langer, dünner Stab:



$\frac{L}{d}$... Aspektverhältnis

• Kopplungstensor (für \underline{z} = Reaktionszentrum)

$$\underline{C} = \underline{0} \longrightarrow \begin{cases} \underline{F} = \underline{\gamma} \underline{u} \\ \underline{M} = \underline{\beta} \underline{\Omega} \end{cases} \quad (4.42)$$

• Translation:

$$\underline{\gamma} = \gamma_{\perp} \underline{\hat{z}} \otimes \underline{\hat{z}} + \gamma_{\parallel} (\underline{1} - \underline{\hat{z}} \otimes \underline{\hat{z}}) \quad (4.43)$$

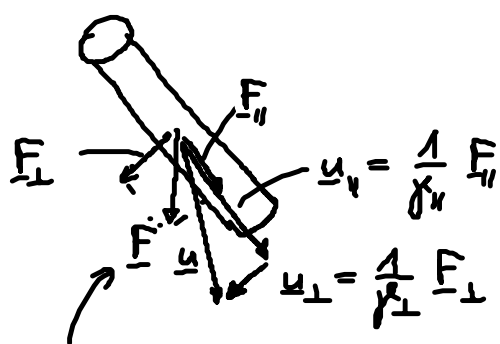
mit $\gamma_{\perp} \approx \frac{4\pi\eta}{\ln(\frac{L}{d})} L \approx 2\gamma_{\parallel}$, $L \gg d$

Bem: (i) Rotationssymmetrie um $\underline{\hat{z}} \rightarrow \underline{\gamma} \triangleq \begin{pmatrix} \gamma_{\perp} & & 0 \\ & \gamma_{\perp} & \\ 0 & & \gamma_{\parallel} \end{pmatrix}$

\rightarrow 2 Reibungskonstanten: $\left. \begin{array}{l} \underline{u} \parallel \underline{\hat{z}} \rightarrow \underline{F} = \gamma_{\parallel} \underline{u} \\ \underline{u} \perp \underline{\hat{z}} \rightarrow \underline{F} = \gamma_{\perp} \underline{u} \end{array} \right\} \quad (4.44)$

(ii) i.a. $\underline{F} \perp \underline{u}$

Bsp:



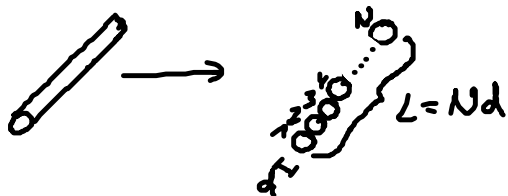
→ Driftbewegung $\perp \underline{F}$

(Bsp. Gewichtskraft)

(iii) Randeffekte des Stabs $\rightarrow \nu_{\perp} \neq 2\nu_{\parallel}$

Bsp: $\nu_{\perp} = \frac{3}{2} \nu_{\parallel} \quad \nu_{\parallel} = \frac{L}{d} \approx 20$

(iv) Beweis von (4.43): s. Übung



jede Kugel \rightarrow Stokeslet: $\underline{v}_j(\underline{x}) = \underline{\Omega}(\underline{x} - \underline{x}_j) \frac{\underline{F}}{N}$

Kraft verteilt sich
homogen auf alle
Kugel

$\rightarrow \underline{u} = \underline{u}(\underline{x}_i) = \underbrace{\frac{1}{3\pi\eta d} \frac{\underline{F}}{N}}_{\text{durch Kraft auf Kugel } i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \underline{v}_j(\underline{x}_i)}_{\text{von anderen Kugel}}$

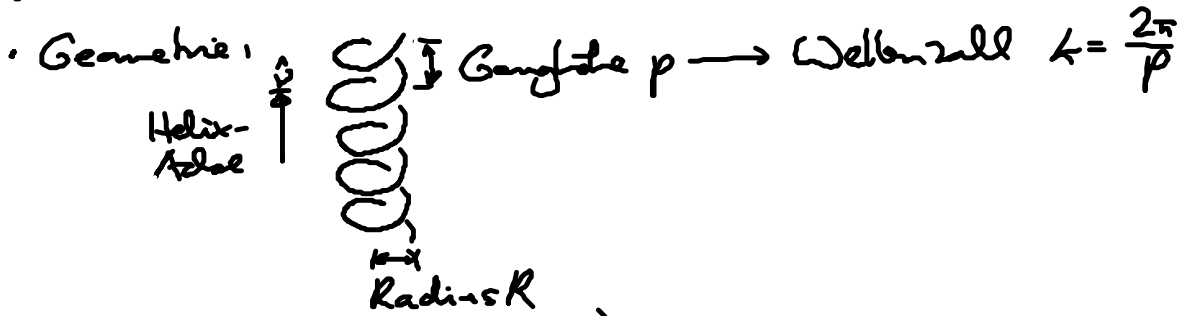
• Rotation: (o.B.)

$$\underline{M} = \beta \underline{\Omega} \frac{1}{L^3} \underline{\vec{d}}$$

mit $\beta = \frac{\pi \eta L^3}{3 \ln(L/d)}$

(4.45)

c) Helix = Schraubenlinie:



Ortsvektor: $\underline{x} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ p \frac{\varphi}{2\pi} \end{pmatrix}$, $\hat{z} \parallel \underline{e}_z$, φ ... Azimutalwinkel

Rechtssdranke } Punkt
 rechtshändige } spiegelig } Linkssdranke
 Helix } } linkshändige
 Helix }

... chirales Objekt

• Beschränkung: $\underline{F}, \underline{M}, \underline{u}, \underline{\Omega} \parallel \hat{z}$

→ $\begin{pmatrix} F \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & C \\ C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \Omega \end{pmatrix}$

mit $\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2+k^2}} \left(\gamma_{\parallel} k^{-2} + \gamma_{\perp} R^2 \right) \\ \beta &= \frac{2\pi}{\sqrt{R^2+k^2}} R^2 \left(\gamma_{\parallel} R^2 + \gamma_{\perp} k^{-2} \right) \\ C &= \frac{2\pi}{\sqrt{\cdot}} k^{-1} R^2 \left(\gamma_{\parallel} - \gamma_{\perp} \right) \end{aligned} \right\} (4.47)$

für eine Ganghöhe

$\gamma_{\parallel}, \gamma_{\perp}$... Reibungs koeffizient pro Längeneinheit
 \parallel, \perp Helix segment
 $\gamma_{\perp} \approx 2\gamma_{\parallel}$ [s. Gl. (4.43)]

Beweis: s. Übung ??

Betrachte: $\mathcal{L} \uparrow v$
 $\mathcal{L} \uparrow \Omega$

Bestimme F, M durch Integration
 von $f = [\int_{\mathcal{L}} \underline{t} \otimes \underline{t} + \int_{\mathcal{L}} (1 - \underline{t} \otimes \underline{t})] \underline{v}$
 \underline{t} ... Tangentialvektor

entlang der Schraubenlinie

• Translations - Rotations - Kopplung: $C \sim \int_{\mathcal{L}} \underline{v} - \int_{\mathcal{L}} \underline{t} \neq 0!$

also: $\Omega \rightarrow F = C \Omega$... Schubkraft
 $u \rightarrow M = C u$... „Schubdrehmoment“

(i) anschaulich: Rotation \rightarrow Reibungskraft tang. || Helixachse
 \rightarrow Schubkraft

s. Folie

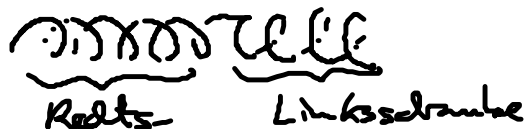
(ii) abstrakt: Punktspiegelung am Ursprung
 rechtshändige \rightarrow linkshändige Helix

$$\left. \begin{array}{l} \underline{u}, \underline{F} \rightarrow -\underline{u}, -\underline{F} \\ \underline{\Omega}, \underline{M} \rightarrow \underline{\Omega}, \underline{M} \end{array} \right\} C \rightarrow -C$$

also $\begin{pmatrix} -\underline{F} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\underline{u} \\ \underline{\Omega} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow C$... Pseudoskalar: $C \sim \pm 1$ für Rechts-/Linksschraube eines chiralen Objekts

(iii) nichtchirales Objekt:



Reibungsmatrix: $\begin{pmatrix} \beta & C \\ C & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & -C \\ -C & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} \quad (4.49)$

• unvollständige Helix: $[N \text{ Rote} \neq n \rho, n \in \mathbb{N}]$

$\underline{\Omega}, \underline{u} \parallel \underline{v} \rightarrow \underline{F} \perp \underline{v}$... Dichtbewegung!

4.7. Kinematische Reversibilität

- oft als „zeitumkehr-Invarianz“ bezeichnet

Sei $v(x, t)$ Lsg. der Stokes Gln.

$$t \rightarrow -t: v(x, t) \rightarrow -v(x, -t) \text{ Lösung}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{falls } \underline{\nabla p} \rightarrow -\underline{\nabla p} \\ \underline{g} \rightarrow -\underline{g} \end{array} \right\} \text{ Kräfte umkehren}$$

... „reversible Strömung“

Bsp. a) Taylor-Versuch

b) Pine et al, Nature 438, 937 (2005)

geordnete Teilchen suspension \rightarrow Irreversible Brownsche Bewegung jenseits kritischer Scherrate!

5. Anwendg I: Fortbewegung von Mikroorganismen

- Motivation: (i) physikal. Mechanismen verstehen } hochaktuell
(ii) Lernen von der Natur
(iii) künstliche Mechanismen entwickeln

• Einordng: $Re = \frac{\rho v a}{\eta}$

$Re > 1$: „driften“ mit Hilfe von Trägheit

$Re \ll 1$: keine Trägheit

Bsp: Escherichia-Coli-Bakterium
[Milliardenfach im menschlichen Darm]

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, v = 30 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}}, a = 3 \mu\text{m}, \eta = 10^{-2} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}$$

$$\rightarrow \boxed{Re = 10^{-4}}$$

5.1. Grundprinzipien

• Fortbewegung bei kleinen Re:

1. Nichtreziproke Schwimmbewegung
2. periodische Deformation des Schwimmers
↔ periodisch variierende hydrodynamische Reibung
3. keine externe Kräfte und Drehmomente
↔ autonome Schwimmer

(51)