

7.2. Elastohydrodynamik dünner Stäbe

a) Kinematik: Raumkurve $\underline{r}(s)$

Tangentenvektor $\underline{\hat{t}}(s) = \frac{d\underline{r}(s)}{ds}$ mit $|\underline{\hat{t}}| = 1$

Krümmung $\frac{1}{R} = \left| \frac{d\underline{\hat{t}}}{ds} \right|$

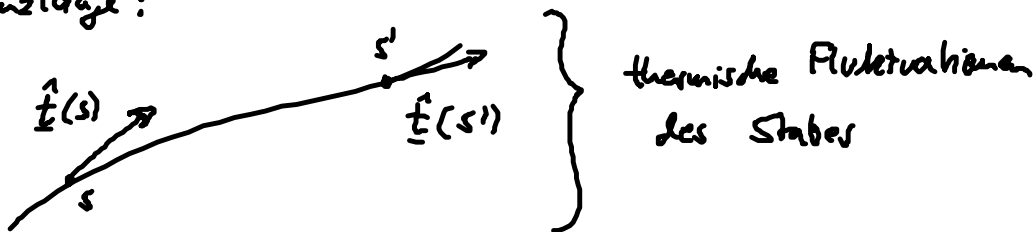
b) Elastizitätstheorie:

Biegeenergie: harmonische Näherung

$$F = \frac{1}{2} k_B T \ell_p \int_0^L \frac{1}{R^2} ds = \frac{1}{2} k_B T \ell_p \int_0^L \left(\frac{d\underline{\hat{t}}}{ds} \right)^2 ds \quad (7.2)$$

$k_B T \ell_p$... Biegekonstante = $k_B T \times$ Persistenzlänge

• Persistenzlänge:



→ Tangentenkorrelation im thermodyn. GG:

$$\langle \underline{\hat{t}}(s) \cdot \underline{\hat{t}}(s') \rangle = e^{-|s-s'|/\ell_p} \quad (7.3)$$

Beweis: s. Übung

Darung (i) $|s-s'| \ll \ell_p \rightarrow \langle \underline{\hat{t}}(s) \cdot \underline{\hat{t}}(s') \rangle \approx 1$

Filament ist gerade

(ii) $|s-s'| \gg \ell_p \rightarrow \langle \underline{\hat{t}}(s) \cdot \underline{\hat{t}}(s') \rangle \approx 0$

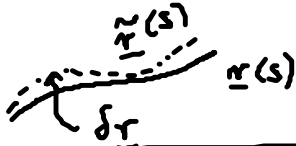
Filament beliebig gebogen!

→ Auf Persistenzlänge ℓ_p behält Filament seine Richtung bei



- (ii) also: L : Gesamtlänge
 $L \gg \ell_p$... flexibles Filament
 $L \approx \ell_p$... semiflexibles Filament
 $L \ll \ell_p$... starres F.

• Führe ein: Biegekräft über Variation der Biegeenergie δF für Variation der Filamentkonfiguration: $\delta \underline{r}(s) = \underline{\tilde{r}}(s) - \underline{r}(s)$ mit $\frac{|\delta \underline{r}|}{|\underline{r}|} \ll 1$



$$\delta F = \int_0^L \left[\frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} \right] \delta \underline{r}(s) ds + \text{Oberflächenenergie} \quad (7.4) \quad \left. \vphantom{\int_0^L} \right\} \text{Definition von } \frac{\delta F}{\delta \underline{r}}$$

Biegekräft: $-\frac{\delta F}{\delta \underline{r}}$ Funktionsabl. von F pro Längeneinh. (7.2)

Bestimmung $\delta F \stackrel{(7.2)}{=} k_B T \ell_p \int_0^L \frac{d\underline{\tilde{r}}}{ds} \delta \frac{d\underline{\tilde{r}}}{ds} ds$

$$= \int \frac{d\underline{r}^2}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2} \delta \underline{r}$$

$$\Rightarrow \delta F = k_B T \ell_p \int_0^L \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \left(\frac{d^2}{ds^2} \delta \underline{r} \right) ds \quad \text{2. part. Int. !}$$

Kettenregel: $\frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) - \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \frac{d}{ds} \delta \underline{r}$

$$\delta F = -k_B T \ell_p \int \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) ds + k_B T \ell_p \left. \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right|_0^L$$

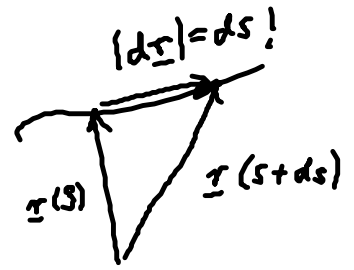
$$\stackrel{!}{=} \underline{k_B T \ell_p} \int \underline{\frac{d^4 \underline{r}}{ds^4}} \delta \underline{r} ds + \underbrace{k_B T \ell_p \left[\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) - \frac{d^3 \underline{r}}{ds^3} \cdot \delta \underline{r} \right]}_{\text{Oberflächenenergie (s.u.)}} \Big|_0^L \quad (7.5)$$

Vgl. mit (7.4): $\boxed{\frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} = k_B T \ell_p \frac{d^4 \underline{r}}{ds^4}} \quad (7.6) \text{ Biegekräft}$

• Führe ein Spannungsterm:

Dynamik $\underline{r}(s, t=0) \rightarrow \underline{r}(s, t)$
 induziert Materiepkt.
 Undehbar: $L = \text{const.}$

$$\rightarrow \left| \frac{d\underline{r}}{ds} \right| = 1$$



→ Variation mit Nebenbedingung!

$$= \int_0^L \left[F + \frac{1}{2} \int_0^L \lambda(s) \left(\frac{d\underline{r}}{ds} \right)^2 ds \right] ds \quad (7.7)$$

Lagrange parameter

Deutung: F_s : Dehnungsenergie, $\underline{\tau}(s) = \lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds}$: Spannung um $\left(\frac{d\underline{r}}{ds} \right)^2 = 1$ zu erfüllen
 (7.8)

Variation

$$\delta F_s = \int \lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \delta \frac{d\underline{r}}{ds} ds = \int \left(\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \right) \left(\frac{d}{ds} \delta \underline{r} \right) ds \quad \text{part. Int. !}$$

$$= - \int \frac{d}{ds} \left(\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \right) \delta \underline{r} ds + \left[\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \delta \underline{r} \right] \Big|_0^L \quad (7.9)$$

Oberflächensterm (s.u.)

$$\rightarrow \frac{\delta F_s}{\delta \underline{r}} = - \frac{d}{ds} \underline{\tau}(s) \quad \text{Spannungskraft} \quad (7.10)$$

c) Elastohydrodynamik:

• Näherung: überdämpfte Bewegung (keine Trägheit)
 „resistive force theory“

Kräfte GGL:

Lokale Reibungskraft
 = Biege + Spannungskraft
 auf Filament

→ Bew.-Gl. für elastisches Filament in Flüssigkeit:

$$\left[\zeta_{\parallel} \frac{d\underline{r}}{dt} + \zeta_{\perp} \left(\underline{1} - \frac{d\underline{r}}{dt} \frac{d\underline{r}}{ds} \right) \right] \frac{d\underline{r}}{dt} = - \frac{\delta F}{\delta \underline{r}(s)} + \frac{d}{ds} \underline{\tau}(s) \quad (7.11)$$

lokale Geschw.

$$= -k_B T \zeta_{\perp} \frac{d^4 \underline{r}}{ds^4} + \frac{d}{ds} \left(\lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} \right)$$

mit $\zeta_{\parallel}, \zeta_{\perp} \dots$ Reibungskoeff. pro Längeneinheit \parallel, \perp zum Filamentvekt.
 [s. Kap. 4.6]

NB (7.11) ist hochgradig nicht linear!

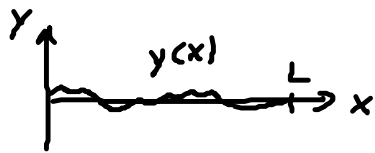
• freie Randbedingungen: $\rightarrow \delta \underline{r} \Big|_0^L \in \delta \frac{d\underline{r}}{ds} \Big|_0^L$ beliebig

mit Oberflächenterme in (7.5), (7.9):

$$\begin{array}{l} \delta \underline{r} \rightarrow \\ \delta \frac{d\underline{r}}{ds} \rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{l} -k_0 T k_p \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} + \lambda(s) \frac{d\underline{r}}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = 0 \end{array}} \quad \begin{array}{l} (7.12a) \\ (7.12b) \end{array}$$

... Filamentenden sind kraftfrei (a) und drehmomentfrei (b)

d) Linearisierung um Grundzustand $\underline{r}_0(x) = x \underline{e}_x, x=0, \dots, L$



$$\underline{r}(x) = x \underline{e}_x + y(x) \underline{e}_y$$

gültig für $|y| \ll L$

keine Schleifen
„Monge-Darstellung“

(i) Tangentenvektor: $\frac{d\underline{r}}{dx} = \underline{e}_x + y' \underline{e}_y, \left| \frac{d\underline{r}}{dx} \right| = \sqrt{1+(y')^2} = 1 + \sigma \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \underline{\hat{t}} = \underline{e}_x + \sigma \left(\frac{dy}{dx} \right) \underline{e}_y \\ \rightarrow \lambda(x) \approx 0 + \sigma \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \end{array} \right\} \underline{\tau} = \lambda \cdot \underline{\hat{t}} = 0$$

(ii) $\frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt} y(x,t) \underline{e}_y \perp \underline{e}_x \approx \underline{\hat{t}} \Rightarrow \left(\underline{\hat{t}} \otimes \underline{\hat{t}} \right) \frac{d\underline{r}}{dt} \sim (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x) \underline{e}_y$

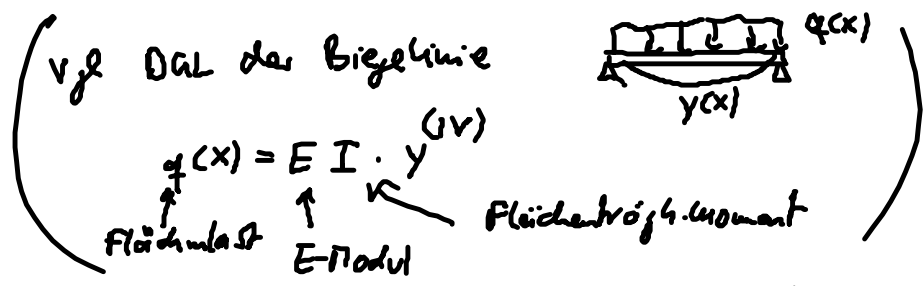
(iii) $\frac{d^4 \underline{r}}{dx^4} = \frac{d^4 y}{dx^4} \underline{e}_y \sim \underline{e}_x (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_y) = 0$

(7.11) Linearisierung
(i) ... (ii)

$$\boxed{\rho \frac{dy}{dt} = -k_B T \rho \frac{d^4 y}{dx^4}} \quad (7.13)$$

(7.13)

... Hyperdiffusionsgleichung



- Lösung: Ansatz $y(x,t) = y(x) \cdot e^{-i\omega t}$ & $y(0) = y_0$

$$\rightarrow i y(x) = \rho \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (7.14)$$

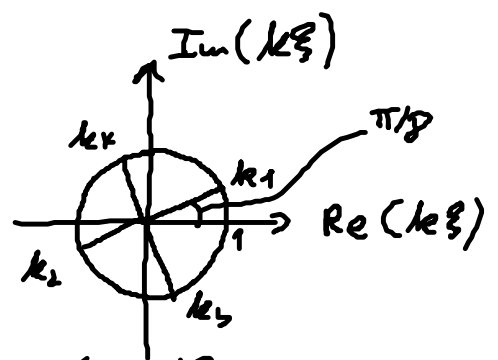
mit $\xi = \left(\frac{k_B T \rho}{\rho \omega} \right)^{1/4} \quad (7.15) \dots$ Eindringtiefe

(i) Lösung für $L \rightarrow \infty$: Ansatz: $y(x) = e^{ikx}$ in (7.14)

$$\rightarrow i = (k\xi)^4$$

$$\rightarrow k_{1/2} = \pm \frac{1}{\xi} \left(\underbrace{\cos \frac{\pi}{8}}_{c_1} + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{8}}_{c_2} \right)$$

$$k_{3/4} = \pm \frac{1}{\xi} (c_2 - i c_1)$$



Lösung mit $y(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ & $y''(0) = 0$ [s. (7.12b)]

$$\rightarrow y(x,t) = \frac{y_0}{2} \left[\underbrace{e^{-c_2 x/\xi}}_{\substack{\uparrow \\ \text{von } k_1}} + \underbrace{e^{i(c_1 x/\xi - \omega t)}}_{\substack{\text{welle } \rightarrow \\ \text{Dämpfung mit } \xi}} + \underbrace{e^{-c_1 x/\xi}}_{\substack{\uparrow \\ \text{von } k_4}} + \underbrace{e^{-i(c_2 x/\xi + \omega t)}}_{\substack{\text{welle } \leftarrow}} \right] \quad (7.16)$$

$\rightarrow \xi$: Eindringtiefe für Oszillationen eines Fibromerandes

(ii) endliches L: Reskalierung $\bar{y} = \frac{y}{L}$, $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{t} = \omega t$

führe ein: dimensionslose Größe:

$$S_p = \frac{L}{\xi} = \left(\frac{\rho \omega L^4}{k_B T \ell_p} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Biegekraft}} \right)^{1/4} \quad (7.17)$$

$$(7.13) \rightarrow \boxed{\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = -S_p^{-4} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}^4}} \quad (7.18)$$

→ S_p bestimmt Verhalten des Filaments!

- (1) $S_p \ll 1 \hat{=} L \ll \xi$... starrer Stab
- (2) $S_p \approx 1 \hat{=} L \approx \xi$... „hydrodyn. Reibung biegt gesamt. Stab“
- (3) $S_p \gg 1 \hat{=} L \gg \xi$... „unendlich langer Stab“