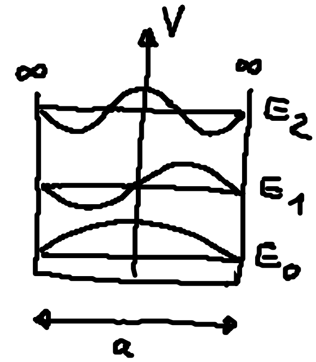
1.6 Stationary states in 1 dimension



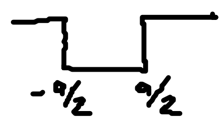
$$\boxed{\hat{H}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)}$$

Potential well with infinite walls:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}\ , \qquad k_n = \frac{(n+1)\pi}{a}\ , \quad n\in\mathbb{N}_0$$

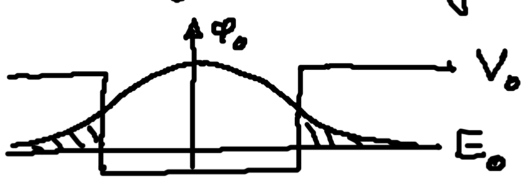
$$\varphi_{2m} \sim \cos(k_{2m}x)\ , \quad \varphi_{2m+1} \sim \sin(k_{2m+1}x)$$

Potential well with finite walls: finite number of eigenstates

Endl. Pot. topf  $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ stetig bei $\pm\frac{a}{2}$

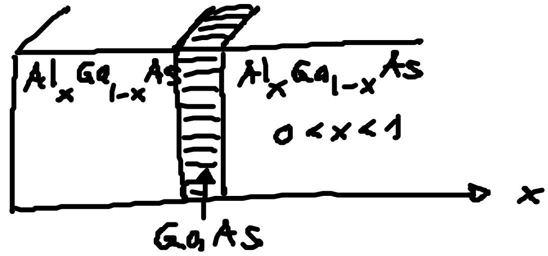
Erg.: Es gibt endlich viele diskrete gebundene Zustände (Eigenzustände mit $E_n < V_0$). Mit ansteigender Energie haben die Eigenfkt.en abwechselnd gerade u. ungerader Parität; die n-te Eigenfkt. hat n Knoten.

Bem.: Die quantenmech. Wellenfkt. ist auch für $|x| > \frac{a}{2}$ ungleich Null, d. h. das Teilchen kann mit endl. Wahrscheinl. in den Bereich $E < V_0$ eindringen, der klassisch verboten ist.

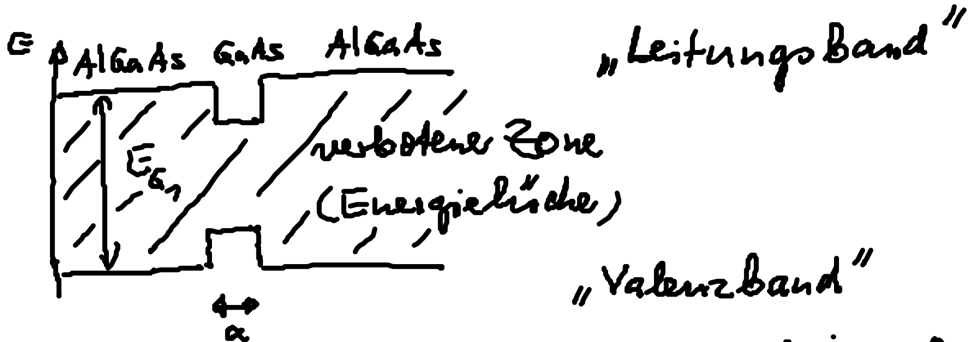


Phys. Beispiel eines 1-dim. Potenzialtopfes

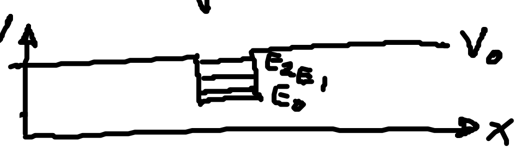
Quantentopf in Halbleitern
(Quantum Well)
Halbleiterschichtstruktur :



Physik-Nobelpreis 2000
H. Kroemer
Sh. Alferov
(HL – Heterostrukturen)



Die Leitungselektronen bewegen sich im Quantentopf :

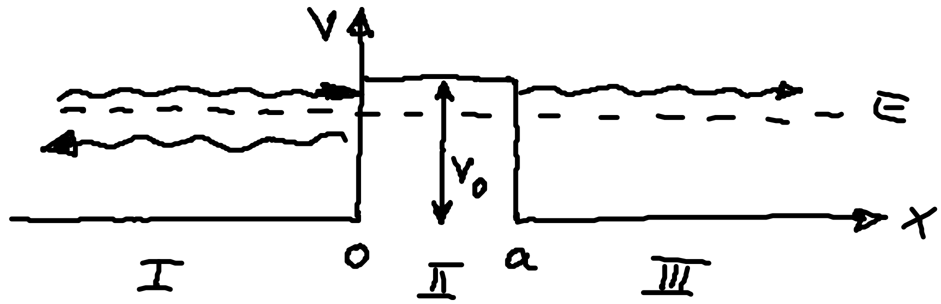


Quantisierte, gebundene Zustände, z.B. GaAs/$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$
($V_0 = 250$ meV) mit $a = 10$ nm : 3 gebundene Niveaus

Durch Variation des Legierungsverhältnisses x und der Schichtdicke lässt sich V_0 und a, und damit die Zahl und Lage der Energieniveaus einfach maßschneidern !

1.7 Tunneleffekt

Eindimensionale Potenzialschwelle:



Physikal. Situation: Betrachte einen stationären Prozess, bei dem im Gebiet I von links eine Welle einläuft, teilweise nach links reflektiert wird, und im Gebiet III eine Welle nach rechts durchläuft:

$$\mathrm{I}: \quad \psi_{\mathrm{I}}(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} + r e^{i(-kx-\omega t)}$$

$$\mathrm{III}: \quad \psi_{\mathrm{III}}(x,t) = t e^{i(kx-\omega t)}$$

r = Reflexions-, t = Transmissions-Amplitude

(Amplitude der einlaufenden Welle auf 1 normiert)

Schrödingergl.:

$$\mathrm{I}, \mathrm{III}: \quad i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$$

Ansatz eingesetzt:

$$\boxed{\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E}$$

$$\mathrm{II}: \quad i\hbar\dot{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0\right)\psi$$

Ansatz für $0 \leq E \leq V_0$:

$$\psi_{\mathrm{II}}(x,t) = A e^{\varkappa x - i\omega t} + B e^{-\varkappa x - i\omega t}$$

Also: $\hbar\omega = -\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} + V_0 = E \Rightarrow \boxed{\frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m} = V_0 - E \geq 0}$

Mit $\psi(x,t) = e^{-i\omega t}\varphi(x)$:

$$\text{I}: \quad \varphi(x) = e^{ikx} + r e^{-ikx}$$
$$\varphi'(x) = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$$

$$\text{II}: \quad \varphi(x) = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}$$
$$\varphi'(x) = \gamma(A e^{\gamma x} - B e^{-\gamma x})$$

$$\text{III}: \quad \varphi(x) = t e^{ikx}$$
$$\varphi'(x) = ikt e^{ikx}$$

<u>Stetigkeitsbedingungen</u>

$$x=0: \quad 1+r = A+B \qquad (a)$$
$$ik(1-r) = \gamma(A-B) \qquad (b)$$
$$x=a: \quad A e^{\gamma a} + B e^{-\gamma a} = t e^{ika} \qquad (c)$$
$$\gamma(A e^{\gamma a} - B e^{-\gamma a}) = ikt e^{ika} \qquad (d)$$

<u>Ziel</u> : Berechnung von t, also Elimin. von r, A, B :

$$(a) + \frac{(b)}{ik} \Rightarrow (1+r)+(1-r) = (A+B) - i\alpha(A-B) \qquad \underline{\alpha := \frac{\gamma}{k}}$$
$$2 = A(1-i\alpha) + B(1+i\alpha) \qquad (e)$$

$$(c) + \frac{(d)}{\gamma} \Rightarrow 2Ae^{\gamma a} = \left(1+\frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika}$$
$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika} e^{-\gamma a}$$
$$(c) - \frac{(d)}{\gamma} \Rightarrow 2Be^{-\gamma a} = \left(1-\frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika}$$
$$B = \frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{\alpha}\right) t e^{ika} e^{\gamma a}$$

A, B eingesetzt in (e) :

$$2 = \Big[\frac{1}{2}\underbrace{\left(1+\frac{i}{\alpha}\right)(1-i\alpha)}_{2+i\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)} e^{-\gamma a} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(1-\frac{i}{\alpha}\right)(1+i\alpha)}_{2-i\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)} e^{\gamma a}\Big] t e^{ika}$$

$$\Rightarrow t = \frac{4e^{-ika}}{\left[2+i\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\right]e^{-\gamma a} + \left[2-i\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\right]e^{\gamma a}}$$

$$= \frac{4e^{-ika}}{4\cosh(\gamma a) - 2i\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\sinh(\gamma a)}$$

Transmissionsvermögen

Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right)$

- einfallend: $\psi_e = e^{i(kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_e = \frac{\hbar}{2im}\left(ik\psi_e^*\psi_e + ik\psi_e\psi_e^*\right) = \frac{\hbar k}{m}$$

- transmittiert: $\psi_t = t e^{i(kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_t = \frac{\hbar k}{m}|t|^2$$

- reflektiert: $\psi_r = r e^{i(-kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow j_r = -\frac{\hbar k}{m}|r|^2$$

Transmissionsvermögen: $T := \frac{|j_t|}{|j_e|} = |t|^2$

Reflexionsvermögen: $R := \frac{|j_r|}{|j_e|} = |r|^2$

Also $T = tt^* = \frac{16}{\left[4\cosh(\gamma a) - 2i\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)\sinh(\gamma a)\right]\left[4\cosh(\gamma a) + 2i\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)\sinh(\gamma a)\right]}$

$$= \frac{16}{16\underbrace{\cosh^2(\gamma a)}_{1+\sinh^2(\gamma a)} + 4\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)^2\sinh^2(\gamma a)}$$

$$= \left[1 + \frac{4\alpha^2 + (1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}\sinh^2(\gamma a)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\right)^2\sinh^2(\gamma a)}$$

$$\alpha^2 = \frac{\varkappa^2}{k^2} = \frac{V_0 - E}{E} \quad , \quad 1 + \alpha^2 = \frac{V_0}{E}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}\, a}{\hbar}\right)}} \qquad 0 \leq \frac{E}{V_0} < 1$$

Im Falle der Stationarität folgt aus der Kontinuitätsgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 + \frac{\partial}{\partial x} j = 0 \quad \Rightarrow \quad j(x) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow j_e + j_r = j_t \quad \Rightarrow \quad 1 - |r|^2 = |t|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{R + T = 1}$$

<u>Quantenmechan. Tunneleffekt</u> :

$T > 0$ für $0 < E \leq V_0$

(<u>Klass.</u> Teilchen mit Energie $E < V_0$ können die Potenzialbarriere V_0 nicht überwinden und werden vollständig reflektiert : $T = 0$)

<u>Kein klassisches Analogon</u> !