English Summary:

2.2 Operators in Hilbert space

eigenvalue eq. of momentum op. $\boxed{\hat{\underline{p}}\,|\underline{p}\rangle = \underline{p}\,|\underline{p}\rangle}$

position representation $\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle$

momentum representation $\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle \underline{p}|\psi\rangle$ completeness relation:

$$\langle r|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \underbrace{\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\,\underline{r}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}}_{\langle \underline{r}|\underline{p}\rangle} \langle \underline{p}|\psi\rangle \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\int d^3p\,|\underline{p}\rangle\langle \underline{p}| &= 1\\ \int d^3r\,|\underline{r}\rangle\langle \underline{r}| &= 1\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{p}} = \int d^3r\,|\underline{r}\rangle \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\langle \underline{r}|$$

class. obs. $F(\underline{r},\underline{p}) \longrightarrow$ op $\hat{F}(\underline{r}, \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}) = \int d^3r\,|\underline{r}\rangle \hat{F}(\underline{r}, \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla})\langle \underline{r}|$

energy representation $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1}$

spectral representation $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\text{projector}}$

self-adjoint (Hermitian) op.: $\hat{F} = \hat{F}^{+}$ (adjoint $\langle\psi|\hat{F}^{+}$)

matrix element $\langle\psi_1|\hat{F}|\psi_2\rangle$, commutator $[\hat{F},\hat{G}] = \hat{F}\cdot\hat{G} - \hat{G}\cdot\hat{F}$,

expectation value $\langle \hat{F}\rangle = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$

2.3 Eigenwerte und Eigenzustände von hermite'schen Operatoren

Annahme: Eine physikal. Observable F habe im normierten Zustand $|\psi\rangle$ einen <u>scharfen</u> Wert.

$$\Delta F^2 := \langle(\Delta\hat{F})^2\rangle = \langle(\hat{F} - \langle\hat{F}\rangle)^2\rangle = \langle\hat{F}^2\rangle - \langle\hat{F}\rangle^2 \overset{!}{=} 0$$

$$= \langle \hat{F}^2 - 2\hat{F}\langle\hat{F}\rangle + \langle\hat{F}\rangle^2\rangle$$

<u>qm. Unschärfe</u>

$$\Leftrightarrow \langle\psi|\hat{F}^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle^2 \qquad (1)$$

Sei $\hat{F}|\psi\rangle = |\phi\rangle$

$\langle\psi|\hat{F} = \langle\phi|$ da $\hat{F}$ hermitesch (phys. Obs.!)

$(1) \Leftrightarrow \langle\phi|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^2 = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$

Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \|\phi\|^2 \underbrace{\|\psi\|^2}_{1} = \langle\phi|\phi\rangle$$

Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $|\phi\rangle \sim |\psi\rangle$

$\Leftrightarrow |\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle \quad \alpha \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \hat{F}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ d.h. $|\psi\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat{F}$.

Theorem 1: Eigenwerte hermite'scher Operatoren sind reell.

Beweis:
$$\left.\begin{aligned} \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle &= \alpha\langle\psi|\psi\rangle = \alpha \\ &= \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle^* = \alpha^*\langle\psi|\psi\rangle^* = \alpha^* \end{aligned}\right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

□

Eigenwerte hermite'scher Operatoren können diskret oder kontinuierlich sein.

Theorem 2: Eigenzustände hermite'scher Operatoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis, diskreter Fall:

Sei $\hat{F}|n\rangle = F_n|n\rangle$

$\hat{F}|m\rangle = F_m|m\rangle$

$\Rightarrow \langle m|\hat{F}|n\rangle = F_n\langle m|n\rangle \quad (1)$

$\langle n|\hat{F}|m\rangle = F_m\langle n|m\rangle \xRightarrow[\hat{F}^+ = \hat{F},\ F_m = F_m^*]{\text{konj. kompl.}} \langle m|\hat{F}|n\rangle = F_m\langle m|n\rangle \quad (2)$

$(2)-(1): (F_m - F_n)\langle m|n\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle m|n\rangle = 0$ für $F_m \neq F_n$

□

Ortsdarstellung:

$\langle m|n\rangle = \int d^3r\, \psi_m^*(\underline{r})\psi_n(\underline{r}) = 0$ für $m \neq n$

normiert: $\boxed{\langle m|n\rangle = \delta_{mn}}$

kontinuierl. Fall: $\boxed{\langle F|F'\rangle = \delta(F-F')}$

vgl. $\langle\underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

<u>Entartung</u> (verschied. Eigenzustände zum selben Eigenwert):

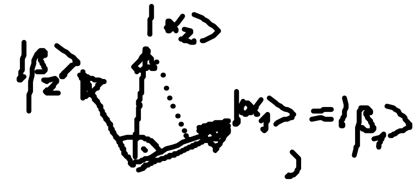
$$\hat{F}\,|n,\alpha\rangle = F_n\,|n,\alpha\rangle \qquad \begin{array}{l} n = 0,1,2,\dots \\ \alpha = 1,2,3,\dots,\alpha_n \ \text{Entartungsindex} \\ (\alpha_n\text{-fache Entartung}) \end{array}$$

$$\Rightarrow (F_m - F_n)\,\langle m,\alpha|n,\alpha'\rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle m,\alpha|n,\alpha'\rangle = 0 \ \text{für } F_n \neq F_m$$

Möglich wäre $\langle n,\alpha|n,\alpha'\rangle \neq 0$ für $\alpha \neq \alpha'$,
d. h. miteinander entartete Zustände sind nicht notwendig orthogonal.

Man kann jedoch im Unterraum der entarteten Zustände („<u>Eigenraum</u>" zum Eigenwert F_n) durch eine lineare Trafo <u>orthonormierte</u> Eigenvektoren $|n,\beta\rangle$ einführen:

$$|n,\beta\rangle = \sum_{\alpha=1}^{\alpha_n} |n,\alpha\rangle\, c_{\alpha\beta}$$



(z.B. Schmidt'sches Orthogonalisierungsfahren :

Also $$\boxed{\langle n,\beta'|m,\beta\rangle = \delta_{mn}\,\delta_{\beta\beta'}}$$

<u>Theorem 3</u> : Zwei hermite'sche Operatoren $\hat{F}$, $\hat{G}$ kommutieren genau dann, wenn sie ein gemeinsames System von Eigenzuständen besitzen.

<u>Beweis</u> : Sei $[\hat{F},\hat{G}] = 0 \qquad \hat{F}|n\rangle = F_n|n\rangle$

$$\Rightarrow (\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F})|n\rangle = \hat{F}(\hat{G}|n\rangle) - F_n(\hat{G}|n\rangle) = 0$$

$\Rightarrow (\hat{G}|n\rangle)$ ist Eigenvektor von $\hat{F}$ zum Eigenwert F_n .

(a) F_n nicht entartet $\Rightarrow$ $\hat{G}|n\rangle \sim |n\rangle$ d.h. $\hat{G}|n\rangle = \gamma|n\rangle$
d.h. $|n\rangle$ ist auch Eigenvektor von $\hat{G}$

(b) F_n entartet : Der Eigenraum E von $\hat{F}$ zum Eigenwert F_n werde durch $|n,\beta\rangle$, $\beta = 1,\dots,s$ (orthonormiert) aufgespannt.
Dann gilt für den Eigenvektor (Entwicklung) $\hat{G}|n,\beta\rangle = \sum_{\beta'} |n,\beta'\rangle\, c_{\beta'\beta}$

Die Matrix $c_{\beta'\beta} := \langle n,\beta' | \hat{G} | n,\beta\rangle = c^*_{\beta\beta'}$
ist hermite'sch, kann also durch eine unitäre Trafo U diagonalisiert werden:

$$|n,\gamma\rangle = \sum_\beta U_{\gamma\beta} |n,\beta\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_\beta U^*_{\gamma'\beta} U_{\gamma\beta} = \delta_{\gamma\gamma'}$$

("Drehung der Basis")

$$\Rightarrow c_{\gamma'\gamma} = \langle n,\gamma' | \hat{G} | n,\gamma\rangle = G_{n\gamma}\, \delta_{\gamma'\gamma}$$

$$\Rightarrow \hat{G}|n,\gamma\rangle = \sum_{\gamma'} |n,\gamma'\rangle\, c_{\gamma'\gamma} = G_{n\gamma} |n,\gamma\rangle$$

d.h. $|n,\gamma\rangle$ ist auch Eigenvektor zu $\hat{G}$!

NB : Im allgemeinen wird dabei die Entartung aufgehoben.

<u>Umkehrung</u>: Sei $\{|n\rangle\}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren zu $\hat{F}, \hat{G}$.

$$\hat{F}\hat{G}|n\rangle = F_n G_n |n\rangle = G_n F_n |n\rangle = \hat{G}\hat{F}|n\rangle \Rightarrow [\hat{F},\hat{G}] = 0$$

□

<u>Def.</u> : Ein lin. Op. $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt <u>unitär</u>, falls

$$U^+ U = U U^+ = \mathbb{1} .$$

Daraus folgt : $U^+ = U^{-1}$
Mit $|\psi'\rangle := U|\psi\rangle$, $\langle\phi'| := \langle\phi| U^+$ folgt für bel. ψ, ϕ :

$$\langle\phi'|\psi'\rangle = \langle\phi| \underbrace{U^+ U}_{\mathbb{1}} |\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$$

Skalarprodukt ist bei unitären Transformationen invariant.

$\Rightarrow$ Unitäre Operatoren transformieren von einer Basis (vollständiges ONS) in eine andere.

Insbesondere: Trafo in die Eigenbasis eines Op. $\hat{F}$
(= Diagonalisierung von $\hat{F}$)

$$\langle \phi' | \hat{F}' | \psi' \rangle = \langle \phi | \underbrace{U^{+} \hat{F}' U}_{\hat{F}} | \psi \rangle = \underbrace{F_{\psi}}_{\text{Eigenwert}} \delta_{\phi\psi}$$

falls $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in$ Eigenbasis

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi\rangle &= U^{+} |\psi'\rangle \\ \hat{F} &= U^{+} \hat{F}' U \end{aligned}}$$

diagonal