English Summary:

2.5 Dynamics

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \hat{H}|\psi\rangle_t \Rightarrow |\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi\rangle_0 = U(t,0)|\psi\rangle_0$

$\langle\mathring{\hat{F}}\rangle := \frac{d}{dt}\langle\hat{F}\rangle \Rightarrow \boxed{\mathring{\hat{F}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{F}] + \frac{\partial\hat{F}}{\partial t}}$

Ehrenfest's Theorem: $\frac{d}{dt}\langle\hat{\underline{r}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{\underline{p}}\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle\hat{\underline{p}}\rangle = -\langle\underline{\nabla}V(\hat{\underline{r}})\rangle$

Schrödinger picture

Op. $\hat{F}_S(\hat{\underline{r}},\hat{\underline{p}})$ time-indep.

eigenvectors $|n\rangle$ time-indep.

state vectors $|\psi\rangle_t$ time-dep. $\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \hat{H}|\psi\rangle_t}$

Heisenberg picture $\hat{F}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$

Op. $\hat{F}_H(t)$ time-dep. $\boxed{\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{F}_H]}$ $\mathring{\hat{F}} = \frac{d}{dt}\hat{F}_H$

eigenvectors $|n\rangle$ time-dep.

state vectors $|\psi\rangle = |\psi\rangle_0$ time-indep.

Interaction (Dirac) picture $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$ $\hat{F}_W(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}^0 t}\hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}^0 t}$

Op. $\hat{F}_W$, eigenvectors $|n\rangle$ } time-dep. through $\hat{H}^0$ $\boxed{\frac{d\hat{F}_W}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}^0,\hat{F}_W]}$

state vectors $|\psi\rangle_W$ time-dep. through perturbation op. $\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle_W = \hat{H}^1_W|\psi\rangle_W}$

2.6 Der harmonische Oszillator (algebraische Lösung)

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstellung im Hilbertraum: 1-dim. harmon. Osz.

(Notation im Folgenden: $x, p, \dots$ statt $\hat{x}, \hat{p}, \dots$)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2}$$ Hamiltonop.

$[p,x] = \frac{\hbar}{i}$ Vertauschungs-Relation

Def. eines Operators („Leiteroperator")

$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x$ nicht hermitesch!

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x$$

$$\Rightarrow \quad bb^+ = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{[p,x] = \frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$b^+ b = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{\frac{\hbar}{i}}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \quad \boxed{[b, b^+] = 1}$$

$$\xrightarrow{(2)} \quad \boxed{H = \hbar\omega\left(b^+ b + \frac{1}{2}\right)}$$

Weitere Vertauschungsrelationen:

$$\left.\begin{array}{l} (bb^+)b = \frac{1}{\hbar\omega} Hb + \frac{1}{2} b \\ b(b^+b) = \frac{1}{\hbar\omega} bH - \frac{1}{2} b \end{array}\right\} [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega b$$

adjungierte Version: $(bH)^+ - (Hb)^+ = -[b^+, H] = \hbar\omega b^+$

<u>Verallgemeinerung</u>:

$$[b, (b^+)^n] = n(b^+)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^+}(b^+)^n$$

Beweis durch vollständige Induktion:

$n = 1$: $[b, b^+] = 1$ ✓

Sei für $n \geq 1$ die Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$[b, (b^+)^{n+1}] = b(b^+)^{n+1} - (b^+)^{n+1} b$$

$$= b(b^+)^{n+1} - (b^+)^n bb^+ + (b^+)^n bb^+ - (b^+)^{n+1} b$$

$$= \underbrace{[b, (b^+)^n]}_{n(b^+)^{n-1}} b^+ + (b^+)^n \underbrace{[b, b^+]}_{1}$$

$$= (n+1)(b^+)^n \qquad \square$$

Adjungierte Version:

$$[b^+, b^n] = -n b^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$$

Für beliebige, in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f:

$$\boxed{\begin{aligned} [b, f(b^+)] &= \frac{\partial}{\partial b^+} f(b^+) \\ [b^+, f(b)] &= -\frac{\partial}{\partial b} f(b) \end{aligned}}$$

<u>Eigenwerte von H</u>

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit dem Eigenwert E, $|E\rangle \neq \mathcal{O}$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$\Rightarrow \hbar\omega \underbrace{\langle E|b^+}_{\langle\psi|} \underbrace{b|E\rangle}_{|\psi\rangle} = \langle E|\left(H - \frac{\hbar\omega}{2}\right)|E\rangle = E - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \quad \text{Energiespektrum nach unten beschränkt}$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \iff b|E\rangle = \mathcal{O}$$

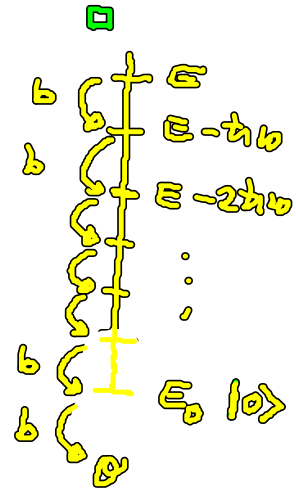
<u>Behauptung</u>: $b|E\rangle$ ist Eigenzustand zu H mit Eigenwert $E - \hbar\omega$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \Rightarrow Hb|E\rangle = (E - \hbar\omega)\, b|E\rangle$$

Beweis:

$$Hb|E\rangle = \underbrace{(bH - \hbar\omega b)}_{\text{da } [b,H] = \hbar\omega b}|E\rangle = b\underbrace{(H - \hbar\omega)|E\rangle}_{(E-\hbar\omega)|E\rangle}$$

$$= (E - \hbar\omega)\, b|E\rangle$$



Durch Wiederholung könnte man Eigenzustände $|E\rangle \neq \theta$ mit beliebig tiefer Energie erzeugen, wenn nicht $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ gelten müsste (s.o.). □

Daher ex. $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$b^m |E\rangle = \theta, \quad \text{aber } b^{m-1}|E\rangle \neq \theta$$

Definiere <u>Grundzustand</u> $n=0$ $\quad |0\rangle := b^{m-1}|E\rangle$

(<u>nicht</u> Null-ket!) sondern Quantenzahl $n=0$

$$H|0\rangle = \hbar\omega\left(b^\dagger b + \tfrac{1}{2}\right)|0\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$$

$$b|0\rangle = b^m|E\rangle = \theta$$

Also $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$ $\boxed{b|0\rangle = \theta}$

Weiter:

$$H b^\dagger |0\rangle = (b^\dagger H + \hbar\omega b^\dagger)|0\rangle = b^\dagger \underbrace{(H + \hbar\omega)|0\rangle}_{\left(\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\right)|0\rangle}$$

da $[b^\dagger, H] = -\hbar\omega b^\dagger$

$$= \tfrac{3}{2}\hbar\omega\, b^\dagger|0\rangle$$

d.h. $b^\dagger|0\rangle$ ist Eigenzustand zum Eigenwert $\frac{3}{2}\hbar\omega$.

<u>Vollständige Induktion</u>:

Sei: $H(b^\dagger)^n|0\rangle = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2}\right)(b^\dagger)^n|0\rangle$.

Dann $H(b^\dagger)^{n+1}|0\rangle = (b^\dagger H + \hbar\omega b^\dagger)(b^\dagger)^n|0\rangle$

$$= b^\dagger \underbrace{(H + \hbar\omega)(b^\dagger)^n|0\rangle}_{\left(\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\right)(b^\dagger)^n|0\rangle}$$

$$= \hbar\omega\left(n + 1 + \tfrac{1}{2}\right)(b^\dagger)^{n+1}|0\rangle$$ □

<u>Normierung</u> der Eigenzustände $(b^\dagger)^n|0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$.

n-ter angeregter Zustand:

$|n\rangle = \alpha_n (b^+)^n |0\rangle$ mit Normierungsfaktor α_n

$1 \overset{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0| b^n (b^+)^n |0\rangle$

$\langle 0| b^n (b^+)^n |0\rangle = \langle 0| b^{n-1} ((b^+)^n b + \underbrace{[b,(b^+)^n]}_{n(b^+)^{n-1}}) |0\rangle$

$= \langle 0| b^{n-1} (b^+)^n \underbrace{b|0\rangle}_{0} + n \langle 0| b^{n-1} (b^+)^{n-1} |0\rangle$

$\overset{n-\text{mal}}{=} \dots$

$= n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} = n!$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor):

$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n |0\rangle}$ normierte Eigenzustände

zu den Energieeigenwerten $\boxed{E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$

$H|n\rangle = E_n|n\rangle$

Quanten-Sprechweise:

$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ „Schwingungsquant"

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (Phononen) der Frequenz ω

$\left.\begin{array}{ll} b & \text{Vernichtungsop.} \\ b^+ & \text{Erzeugungsop.} \end{array}\right\}$ für Schwingungsquanten

$b|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} b(b^+)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \{(b^+)^n b + [b,(b^+)^n]\} |0\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{n!}} n (b^+)^{n-1} |0\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle$

$b^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle$

$N := b^+ b$ Teilchenzahloperator der Schwingungsquanten:

$N|n\rangle = b^+ \underbrace{b|n\rangle} = n|n\rangle$

$$\underbrace{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}_{\sqrt{n}\,\sqrt{n}\,|n\rangle}$$

in Übereinstimmung mit

$$H\,|n\rangle = \hbar\omega\left(N+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle$$